

中国文库

· 科学技术类 ·

# 中国古代历法

(下)

张培瑜等 著



中国科学技术出版社

中国文库

科学技术类

# 中国古代历法

(下)

张培瑜 陈美东 薄树人 胡铁珠 著

中国科学技术出版社

### 图书在版编目(CIP)数据

中国古代历法/张培瑜等著. —北京: 中国科学技术出版社, 2007. 9

(中国文库)

ISBN 978-7-5046-5071-9

I. 中… II. 张… III. 古历法—研究—中国  
IV. P194.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 143219 号

策划编辑: 吕建华 许 英

责任编辑: 吕建华 许 英

整体设计: 翁 涌 李 梅

责任印制: 董文权

### 中国古代历法(上、下)

Zhongguo Gudai Lifa

张培瑜等 著

---

中国科学技术出版社出版

<http://www.kjpbbooks.com.cn>

北京市海淀区中关村南大街 16 号 邮编: 100081

北京瑞古冠中印刷厂印刷 新华书店总店北京发行所经销

2007 年 9 月第 1 版 2007 年 9 月第 1 次印刷

开本: 880 毫米×1230 毫米 1/32 印张: 33.75

字数: 780 千字 印数: 1—4500

ISBN 978-7-5046-5071-9

定价: 57.00 元(全二册)

PDF

## “中国文库”出版前言

“中国文库”主要收选 20 世纪以来我国出版的哲学社会科学研究、文学艺术创作、科学文化普及等方面的优秀著作和译著。这些著作和译著，对我国百余年来政治、经济、文化和社会的发展产生过重大积极的影响，至今仍具有重要价值，是中国读者必读、必备的经典性、工具性名著。

大凡名著，均是每一时代震撼智慧的学论、启迪民智的典籍、打动心灵的作品，是时代和民族文化的瑰宝，均应功在当时、利在千秋、传之久远。“中国文库”收集百余年来名著分类出版，便是以新世纪的历史视野和现实视角，对 20 世纪出版业绩的宏观回顾，对未来出版事业的积极开拓，为中国先进文化的建设，为实现中华民族的伟大复兴做出贡献。

大凡名著，总是生命不老，且历久弥新、常温常新的好书。中国人有“万卷藏书宜子弟”的优良传统，更有当前建设学习型社会的时代要求，中华大地读书热潮空前高涨。“中国文库”选辑名著奉献广大读者，便是以新世纪出版人的社会责任感和历史使命感，帮助更多读者坐拥百城，与睿智的专家学者对话，以此获得丰富学养，实现人的全面发展。

为此，我们坚持以“三个代表”重要思想为统领，坚持贯彻“百花齐放、百家争鸣”的方针，坚持按照“贴近实际、贴近生活、贴近群众”的要求，以登高望远、海纳百川的广阔视野，披沙拣金、露沙雪藏的刻苦精神，精益求精、探赜索隐的严谨态度，投入到这项规模宏大的出版工程中来。



“中国文库”所收书籍分列于8个类别，即：(1)哲学社会科学类(哲学社会科学各门类学术著作)；(2)史学类(通史及专史)；(3)文学类(文学作品及文学理论著作)；(4)艺术类(艺术作品及艺术理论著作)；(5)科学技术类(科技史、科技人物传记、科普读物等)；(6)综合·普及类(教育、大众文化、少儿读物和工具书等)；(7)汉译学术名著类(著名的外国学术著作汉译本)；(8)汉译文学名著类(著名的外国文学作品汉译本)。计划出版1000种，自2004年起出版，每年出版1至2辑，每辑约100种。

“中国文库”所收书籍，有少量品种因技术原因需要重新排版，版式有所调整，大多数品种则保留了原有版式。一套文库，千种书籍，庄谐雅俗有异，版式整齐划一未必合适。况且，版式设计也是书籍形态的审美对象之一，读者在摄取知识、欣赏作品的同时，还能看到各个出版机构不同时期版式设计的风格特色，也是留给读者们的一点乐趣。

“中国文库”由中国出版集团发起并组织实施。收选书目以中国出版集团所属出版机构出版的书籍为主要基础，逐步邀约其他出版机构参与，共襄盛举。书目由“中国文库”编辑委员会审定，中国出版集团与各有关出版机构按照集约化的原则集中出版经营。编辑委员会特别邀请了我国出版界德高望重的老专家、领导同志担任顾问，以确保我们的事业继往开来，高质量地进行下去。

“中国文库”，顾名思义，所收书籍应当是能够代表中国出版业水平的精品。我们希望将所有可以代表中国出版业水平的精品尽收其中，但这需要全国出版业同行们的鼎力支持和编辑委员会自身的努力。这是中国出版人的一项共同事业。我们相信，只要我们志存高远且持之以恒，这项事业就一定能够持续地进行下去，并将不断地发展壮大。

**“中国文库”编辑委员会**

# “中国文库”第三辑

## 编辑委员会

顾 问

(按姓名笔画为序)

于友先 邬书林 刘 杲 许力以 杜导正 李从军 李东生  
杨牧之 宋木文 张小影 柳斌杰 徐惟诚 龚心瀚

主 任：聂震宁

副主任：刘伯根

委 员

(按姓名笔画为序)

王之江 王 琦 王瑞书 边彦军 吕建华 刘玉山 刘国辉  
刘健屏 李 岩 李保平 李 峰 杨 才 杨 耕 杨德炎  
吴江江 吴希曾 吴尚之 吴 斌 何林夏 汪继祥 宋一夫  
宋焕起 张伟民 张 琦 陈 鹏 胡守文 俞晓群 祝君波  
贺圣遂 贺耀敏 栾世禄 黄书元 曹 铁 龚 莉 惠西平  
程大利 焦国瑛 解 伟 薛炎文

### **“中国文库”第三辑编辑委员会办公室**

**主 任：**刘伯根

**副主任：**刘国辉 宋焕起

**成 员：**(按姓名笔画为序)

于殿利 刘晓东 李红强 汪家明 林 阳

徐 俊 潘凯雄

**出版编务组：**

李红强 许永成 蔡增裕 谢仲礼 乔先彪

全冠军

# 《中国天文学大系》编委会

总 主 编 王绶琯 叶叔华

主 任 薄树人

编 委 (以汉语拼音为序)

陈久金 陈美东 陈晓中

崔振华 杜升云 卢 央

吕建华 苗永宽 王 宜

吴守贤 席泽宗 许 英

徐振韬 张培瑜 庄威风

本书著者 张培瑜 陈美东 薄树人

胡铁珠

编 辑 组 吕建华 许 英 郑洪炜

崔 玲 赵 晖 余 君

李惠兴

## 总 序

中国古代天文学建树非凡，遗泽久长，是我们民族的骄傲。我一直怀着崇敬的心情向往着这份文化珍宝。只是数十年漫漫学海中有许多错过的机缘，以致今天仍还像是一个鹄立在圣殿门前的朝圣者，终未能进入门庭。尽管如此，我仍然感受到很大的喜悦、有幸在新中国成立初期百废待兴之际，见证了在竺可桢先生的倡导下，中国古代天文研究跨出了前所未有的聚集人才、系统“攻关”的步骤，而从那时起经两代人的努力，资料齐集，成绩斐然。如今又促成了这一由中国科学院自然科学史研究所牵头，组织全国各单位的天文学史研究者齐力完成的学术壮举——一部上起夏商，下逮近代，罗列我国古天文学万象的六百万言鸿篇巨制！

纯粹用现代科学的眼光审视古代天文学，首先，它是一门旨在认识天文世界——发现天文现象、探究天文规律的自然科学。这和今日的学科定位并无不同。其次，它是一门“观测的科学”，今日也仍然如此。如果把天文观测工具的“古”的界限设在天文望远镜应用之前，那么古代天文学眼界中所有的天体不超过 7000 个，这使得天文实测研究的对象限于几个太阳系天体的表象及其运行轨迹，星空的监测以及几千个恒星的定位和陈列。这些，中国和其他古代文明的情况基本上一致，可以认为是历史的必然。

与之相应的天文理性认知的探求，这样规模的“天”，相对于地上的万物和人间的万众，虽然仍然是伟大、永恒，但也显得比较简单、稳定，导致了我国古代“天覆地载，人居于中”、天地人“三

才”协调的宇宙观。这在一方面形成了宇宙结构、天体演化、天人感应的种种学说,成为我国古代哲学思想的一个组成部分;另一方面,把天文实测结果的解释引向到“天文”与“地理”的相关性、“天道”与“人事”的相关性的探求。前者把“天”联到了“地”,导致了在“时政”、“编历”这些“国之大政”上的应用;后者把“天”联到了“人”,应用到了当时同样属于“国之大政”的“星占”。这些“应用天文学”备受尊崇,历代政权为之设立专职,在设备投资、人员培训上享有优遇,结果在历史长卷中成为我国古代天文学发展的主线索:保持了天象监测的长期持续性、主导了一代代天文仪器、实测方法的研究和发展以及一代代历算方法(和有关数学)的研究和发展。由此形成的堪称完整的体系,加上求实、求精的敬业传统,为我们留下了大量宝贵的历史资料和学术资料(其中也包括了与之相互影响的历代官方与非官方的天文著述,也包括了频繁出现的天文文物)。这种由长期皇权统治产生的古代版的“任务带动学科”的发展模式,历史功过暂且不去评论,但这份“资料宝库”对于今日中国天文学史工作者来说则是巨大的学术资源,当然同时也是巨大的责任,要很好地发掘和整理。

继 20 世纪 70 年代后期天文史料的一次大规模整理,中国天文学史工作者“自 1979 年起开始思索:是否有可能编著一部与中国天文学的悠久历史和广阔的内涵相适应的中国天文学史著作?商议的结果便是《中国天文学史大系》构想的诞生”(薄树人先生语)。

天文学是我国古代最发达的自然科学之一,在华夏科学、文化史中是一个具有连贯性的组成部分。在《中国天文学史大系》(以下简称《大系》)的全套书结构中,《中国古代历法》、《中国古代天体测量学及天文仪器》、《中国古代星占学》、《中国古代天象记录的研究与应用》、《中国古代天文学思想》、《中国古代天文机构与天文教



育》、《中国古代天文学家》各立一卷，以概全面。完成这样的一部《大系》，可谓是从一个重要的侧面来认识华夏文化的源与流。

近世 100 多年，华夏文化受西方文化的冲撞，激湍跌宕，对传统文化的理解和传承出现前所未有的震动，至今波澜未已。其间在天文学上体现为结束古代传统、“转轨”西化、进入近现代的航道。《大系》中所设的《中国古代天文学的转轨与近代天文学》一卷，阐述了这一时期的历史。

全套书中用《中国少数民族天文学》一卷介绍了对同属华夏文化的发掘和整理，是一项开辟性的探索。另一卷《中国古代天文学词典》篇幅达 47 万字，对天文典籍阅读者是十分有用的工具，也是好伴侣。《大系》共 10 卷，每卷 40 万到 80 万字。格局齐整，足以副“大系”之称。这是当年我国一代中青年天文学史工作者“聚水成渠”的宏愿。回溯“五四”运动大潮中，我国现代天文学的先驱者们在率先“西化”的同时就着力启动了我古代天文学遗产的自力发掘和整理。60 年过后我们喜见《大系》的构思(1979)，然后是构思落实为计划(1990)、诞生了文稿(1999)，现在文稿得以付梓(2007)完成了“多年修就的善果”(陈美东先生语)。

《大系》从构思到面世历时四分之一世纪。多位学者为之贡献了属于一生中最好的年华。他们如今青丝成雪，有几位且已过早地离开了我们。编委会主任薄树人先生从一开始就为《大系》的筹、编、写呕心沥血，奋斗到了最后一息(1997)。继后陈美东先生以令人钦佩的执着挑起担子，完了大家的宏愿。而他们二位在本书跋记中所透露的甘辛，或亦足以在相应历史中着上耐人寻思的一笔！

王绶琯

2007 年 7 月于北京

# 前 言

历法是研究日月五星运行,推算各种计时单位长度,建立其间关系,制订时间序列法则的科学。

中国以农业立国,农时与季节有密切关系。因此授时颁历一直是历代君主的主要任务。《史记》说,“王者易姓受命,必慎始初,改正朔易服色,推本天元,顺承厥意。”颁历于是也成为君权统治的象征。臣民奉谁的正朔就表示接受谁的统治。因此,“自殷周皆创业改制”,到清末 3000 多年,中国历法数十改,制历逾百家,是世界上历法科学最发达的国家。颁行的历法中,除太平天国天历外,全是阴阳合历。辛亥革命后,中国改行格里历(公历、阳历)。但至今我国颁行的历书中仍附载阴阳历月日(又称农历、夏历)。

阴阳历的平均年长称“岁”,是反映寒暑变化的回归年。月长由月相盈亏圆缺周期决定,即朔望月。以太阳周日视运动形成的昼夜为日。历法三要素的年月日全是依据日(太阳)月(太阴)天象得出,这是阴阳合历的基本性质。

由甲骨卜辞可知,殷商武丁时期的历法已是月有大小年有平闰(12 个月或 13 个月)的阴阳合历。到清末,阴阳历一直是中历的主要形式。但与其他阴阳历不同,中历还有两个显著的特点。

二十四节气是中国的独创,这是中历的第一个特点。它是在四时八节基础上发展起来的。殷周之交已分四时,春秋时代已有分至启闭八节。到战国晚期就形成了完整的二十四节气体系。二十四节气是中历确定月名月序和设置闰月的凭藉,也是农事活动的主要依据。节气由太阳位置决定,反映太阳的视运动。在历

书中有固定的月份和日期范围,使中历具有较强的阳历性质。

中历一直配合采用干支来纪时(年月日时),这是中历的第二个特点。殷墟卜辞显示,3000多年前古人已熟练地用干支纪日。西汉末至今,一直用干支来纪年。春秋战国时期已采用十二辰纪月,而十二辰加时制度至迟西汉时已被采用。2000年来中国干支纪时与历法数序纪时既互相配合又各自成系统。实际上中历干支纪时系统是中国特有的阳历历法体系。可称之为干支历、节气历或中国阳历。它以立春为岁首,交节日为月首。年长即回归年,一节一中为一月。在节气历中年月日全由太阳视运动决定而与太阴月相无关。但它又与通常的阳历不同,后者月长是由人为规定而与天象无涉。所以它是有中国特色的阳历。唐以后,五代历书月名开始注以干支,北宋时又将十干十二辰配合以纪时,至此年月日时分别全以干支注记,节气历日趋完整。它实际上是“十二气历”和“天历”的滥觞。可惜的是,在古代干支历日多与历法纪时配合,只在历书中注记或民间用于象数、选择和命理学中,它在历法上的作用一直未能得到很好的认识。

殷商、西周以前的远古时期,历法属于观象授时阶段。主要通过昏旦观测某些标准星象(鸟火昴虚参斗等)的伏见南中和月相来颁告四时、脑望和农时季节,西周以后进入推步制历时期。早期推步历法颁历就是颁朔。以计算四时八节朔闰历日为目的。西汉末年开,推步内容有了发展。由单纯的历日制度扩大到了日月五星运行的天体历。自此以后,中国历法并不限于推算日历。它包括了中朔、发敛、日躔、月离、晷漏、日月食和五星运动等七方面的计算内容。

随着天文、数学的进步发展,中国古历计算方法的历史进程可分作如下四个阶段。

(1)古代,先秦两汉至南北朝,这一段历法,主要以平运动计

算中朔和日月五星的位置(后期加进月行改正)。

(2)中世纪,隋唐五代宋元明时期历法,把日月五星视作变速运动。计算采用二次、三次内插,相减、相乘等算法。

(3)清初时宪历,采用第谷改进的地心体系,以本轮均轮、几何学和球面三角方法来计算天体的距离和速度变化。

(4)清代中、后期的历书,依据地心椭圆运动体系,开普勒第一、第二定律计算。

在中国古代上百部历法中约有半数文献中保存有比较完整的记载。在“二十四史”中十五史有“历志”,记载斯时的历术和法数。但因历理深奥、术语难懂,一般读者都视作天书望而却步。但也有不少读者对历法情有独钟。他们希望历法书不仅介绍历法的发展进步,通过它还能了解一些历术的具体推步方法和计算程序。

颁历的主要目的是授时,用来指导农业生产和安排各项社会活动,重在推步和实用。所以本书侧重于历术的复原,并以多种形式介绍具体推步方法。但历经术文刊本多有讹讹衍夺。复原历术算法、数据,往往困难重重。我们的工作是在前人基础上,又参考借鉴时贤的大量成果论著。尽管如此,有的历术的重建,还是只能采用参酌原文,依据天文概念反推的办法来进行。复原的历术是否正确,我们尽量查找文献中推步验历的实例来复算校核,以便确认。

在介绍各历推步方法时,我们尽量多举实例。这样,既利于深入领会历术推步原理、熟悉具体计算方法、公式、程序,又可方便读者自己计算校核、举一反三。在算例中本书还给出与前代历法及现代计算结果的比较,有助于了解历法的发展情况和古历推步所达到的精度。

本书还特别注意阐述历法各术推步的天文意义。让读者不

仅会算而且明白为什么要这样算。例如昏旦中星和恒星时的关系,就没有简单介绍今天计算恒星时的公式,而侧重从历理方面解释它与太阳、春分点位置的关系。

为了分析日躔月离表的盈缩朏朧及定朔的太阳月亮改正的正负号关系,并为说明中历定朔改正的精度,书中介绍了定朔计算的方法、公式,中历推步忽略了哪些项及会产生的影响。

宣明历引入气时刻三差,与天文学的视差,历术的高下差、南北差、东西差之间关系如何,视差对日食计算的影响和作用,等等。本书对此都作了一些定量的分析考查。为了讨论各历推求日度月度(日月位置)的精确情况,本书还介绍了计算太阳月亮位置 and 定气的简单方法和公式。

历法疏密,验在交食。中历特别重视日月食的计算。后者也促进了历法的发展。很多读者也对日月食推步感兴趣。从初期交食周期预报,到日月运动改正、据食限去交远近计算交食有无与食分大小、视差对交食的影响作用,直到授时、大统。本书对历代日月食计算方法作了比较系统的介绍。

本书是几位作者多年从事历法研究的心得和成果。作者撰著此书的初衷是侧重介绍历术推步及阐明计算的天文意义,希望读者通过此书能基本了解历法和历术的推步。

在 17 世纪中西文化大交融的过程中,由于接受了西方天文学思想和天体运动模型,又引进了几何学和球面三角等新的数学方法,中国的历法计算有了长足进步。清时宪历的推算及甲子元癸卯元的变革,正好反映了这一时期历法的重大发展变化。由于篇幅和研究涉猎的原因,本书未能包含“中西合璧时宪历”的内容,对上述历法推步发展的第三、第四阶段的介绍,书中只得付诸阙如。历法推步根据不同需要形成各类历书。御殿颁历乃国家盛典。原拟“中国的历书和历注”一章介绍历代各类历书,步发致

术,历注的内容、发展、演变以及推算方法,也由于同样原因未能纳入本书之中。这些都是本书的不足和缺憾。

本书由张培瑜、陈美东、胡铁珠、薄树人四人分别执笔。陈美东撰写第一、二章,薄树人撰写第四章,胡铁珠撰写第八章,张培瑜撰写第三、五、六、七、九、十章。

张培瑜

2007年5月



# 目 录

第一章 历表及表格计算法 .....	1
第一节 中国古代历法发展概况 .....	2
第二节 五星动态表 .....	11
一、西汉至北魏时期的五星动态表 .....	11
二、隋和唐初的五星动态表 .....	15
三、唐大衍历及其后的五星动态表 .....	25
第三节 二十八宿赤道和黄道宿度表 .....	32
一、二十八宿赤道宿度表 .....	32
二、二十八宿黄道宿度表 .....	36
第四节 二十四节气太阳所在赤道宿度和昏旦中星表 .....	40
一、二十四节气太阳所在赤道宿度表 .....	40
二、二十四节气昏旦中星表 .....	44
第五节 二十四节气晷长、昼夜漏刻和日出入时刻表 .....	50
一、二十四节气晷长表 .....	50
二、二十四节气昼夜漏刻表 .....	55
三、二十四节气日出入时刻表 .....	64
第六节 二十四节气太阳视赤纬表和月亮极黄纬表 .....	68
一、二十四节气太阳视赤纬表 .....	68
二、月亮极黄纬表 .....	72
第七节 月离表和日躔表 .....	75
一、月离表 .....	75
二、日躔表 .....	79

第八节 黄赤道、黄白道和赤白道度差表 .....	85
一、黄赤道度差表 .....	85
二、黄白道度差和赤白道度差表 .....	91
第九节 五星运动不均匀性改正表 .....	95
一、五星入气加减表 .....	95
二、五星盈缩历 .....	103
第十节 交食计算用表 .....	109
一、推日应食不食和日不应食而食表 .....	109
二、日食时差改正表 .....	114
三、日食食分大小改正表 .....	120
四、月食食分大小的节气改正表 .....	128
五、食分与全部见食时间关系表 .....	132
六、太阳天顶距大小与八尺表晷长关系表 .....	134
第二章 历表的公式化 .....	139
第一节 日食气差、刻差算式 .....	140
一、五纪历和正元历日食食差算式 .....	140
二、宣明历气差、刻差、加差算式及其对宋初历法的 影响 .....	142
三、崇天历及其后诸历法的气差、刻差算式 .....	152
第二节 日月五星中心差算式 .....	162
一、太阳中心差算式 .....	162
二、月亮和五星中心差算式 .....	169
第三节 交食时差算式 .....	175
一、宣明历、崇玄历日食时差算式及其影响 .....	175
二、纪元历及其后诸历法的交食时差算式 .....	179
第四节 黄赤道、黄白道和赤白道度差算式 .....	186
一、黄赤道度差算式 .....	186

二、黄白道和赤白道度差算式 .....	191
第五节 太阳视赤纬算式 .....	197
一、崇玄历太阳视赤纬算式及其影响 .....	197
二、纪元历太阳视赤纬算式 .....	204
第六节 昼夜漏刻长度算式 .....	207
第七节 晷长算式 .....	214
一、崇玄历、仪天历、崇天历晷长算式 .....	214
二、明天历和纪元历晷长算式 .....	220
第八节 月亮极黄纬算式 .....	224
第九节 交食初亏、复圆时刻算式 .....	230
一、崇玄历和钦天历交食初亏、复圆时刻算式 .....	230
二、崇天历交食初亏、复圆时刻算式及其影响 .....	234
三、授时历交食初亏、复圆时刻算式 .....	242
第十节 月食食既和生光时刻算式 .....	244
一、崇天历、明天历、观天历月食食既带食出入时刻算式 .....	244
二、纪元历、重修大明历、授时历月食食既和生光时刻算式 .....	247
第三章 早期推步历法蠡测 .....	251
第一节 现象授时与推步制定历法 .....	251
第二节 《春秋》历日和日食 .....	254
第三节 《左传》历日和杜预《春秋长历》 .....	267
第四节 《春秋》《左传》历日分析 .....	270
一、《左传》杂采各国史册、经传历日常有参差 .....	270
二、《左传》所载日食,说法矛盾多端 .....	271
三、《左传》所记日至朔闰常与鲁历不合,并大多失天 ...	274
四、文公元年闰三月子虚乌有 .....	279

五、《左传》有用周历解说《春秋》的痕迹 .....	282
六、《左传》所书岁星位置均非其时实记 .....	285
第五节 春秋鲁国历法 .....	289
一、王韬的《春秋长历》 .....	289
二、春秋鲁国的历朔推步 .....	294
三、春秋鲁历的置闰和岁首 .....	318
四、春秋鲁、晋历法的异同 .....	324
第六节 古六历的创制行用时代 .....	327
一、古六历是四分术行用于战国秦汉初 .....	327
二、汉传六历有些算术并非战国之旧 .....	335
第七节 六历法数与推步 .....	342
一、六历法数 .....	342
二、六历步法 .....	355
三、六历算例 .....	365
第八节 鲁历以闰余一之岁为岁首 .....	372
第九节 元光历谱与汉初历法 .....	375
第十节 秦与汉初历法不同 .....	382
一、秦与汉初历法是不一样的 .....	382
二、秦用颛顼历问题 .....	385
第十一节 秦至汉初历法研究的新进展 .....	386
第四章 太初历和三统历 .....	391
第一节 太初历 .....	391
一、关于太初改历的史料 .....	392
二、太初改历真相 .....	396
第二节 三统历 .....	404
一、《三统历》序言 .....	405
二、《三统历》术文 .....	412

三、三统历《世经》 .....	455
第三节 太初历和三统历的不同点 .....	457
一、二十八宿体系 .....	457
二、历元与上元 .....	459
三、朔望月和回归年 .....	459
四、冬至点的位置 .....	462
五、两历比较小结 .....	464
第五章 东汉四分历研究 .....	466
第一节 东汉四分历的颁行、法数和发展 .....	466
一、基本法数和步术 .....	466
二、东汉四分历的发展和创新 .....	472
第二节 太阳出没及步晷漏术 .....	475
一、漏刻随去极度差而增损 .....	475
二、四分历黄道去极度与气朔失天 .....	481
三、日中晷影和昼夜漏刻 .....	492
第三节 昏旦中星和黄道赤道日度 .....	495
第四节 步中朔、日月度及月食 .....	505
一、步中朔、日月度 .....	505
二、推月食术 .....	511
三、交食周期 .....	515
四、135 月交食周期 .....	522
第五节 月食出现的间隔时间与步术 .....	535
一、月食出现的间隔时间 .....	535
二、四分历应用周期推算月食的方法 .....	538
第六节 行星运动和开普勒定律 .....	549
一、行星的视运动 .....	549
二、地心体系与日心体系 .....	551

三、开普勒定律 .....	554
四、轨道根数和星历表的计算 .....	562
五、五星的地心运动 .....	566
第七节 步五星术 .....	572
一、基本法数 .....	572
二、推五星合日术 .....	573
三、五星会合周期内视运动 .....	577
四、四分历推五星合日计算实例 .....	580
第六章 魏晋南北朝历法 .....	583
第一节 乾象历 .....	583
一、减少斗分 .....	583
二、过周分和近点月 .....	584
三、月行迟疾与定期计算 .....	589
第二节 景初历 .....	597
第三节 元嘉历和大明历 .....	604
一、元嘉历 .....	605
二、大明历 .....	614
第四节 北朝历法概况 .....	632
第七章 隋唐初历法大发展 .....	641
第一节 日行盈缩的发现及在历法中的应用 .....	641
第二节 张宾历和大业历 .....	646
一、张宾历的基本用数 .....	646
二、大业历 .....	651
第三节 刘焯皇极历的创法 .....	658
一、皇极历的基本用数和步法 .....	659
二、皇极历日躔表及日行盈缩的计算 .....	670
三、月离表及月行迟疾改正 .....	678



第四节 初唐戊寅元历及月食步法 .....	685
一、戊寅元历的颁行及校订 .....	685
二、戊寅历法数 .....	688
三、戊寅历步交会术 .....	692
第五节 平朔定朔及天文实朔的计算 .....	696
第六节 麟德历与定气定朔 .....	702
一、麟德历的修撰与颁行 .....	702
二、法数和定气定朔 .....	705
第七节 会合运动和月平行速 .....	718
第八章 大衍历 .....	725
第一节 步中朔术 .....	725
一、安排节气 .....	726
二、安排朔日和闰月 .....	727
三、推没、灭日 .....	728
第二节 步发敛术 .....	733
第三节 步日躔术 .....	738
一、求太阳不均匀性改正值 .....	739
二、黄赤道宿度换算 .....	744
三、求每日太阳经度 .....	745
第四节 步月离术 .....	751
一、月亮不均匀性改正和定朔改正 .....	751
二、黄白道经度换算 .....	758
三、求月亮每日白道经度 .....	760
第五节 步晷漏术 .....	768
一、求阳城地区八尺表每日午中晷长 .....	771
二、求每日漏刻 .....	772
三、求每日黄道去极定数 .....	773

四、求每日距中度定数 .....	773
五、求九服所在每气气初中晷常数 .....	773
六、九服所在昼夜漏刻 .....	774
第六节 步交会术 .....	777
一、求入交定日 .....	778
二、求月亮黄道纬度 .....	780
三、日食预报 .....	783
四、月食预报 .....	792
第七节 步五星术 .....	802
一、五星动态表 .....	803
二、对合点进行两项中心差改正,并求出定合日及 其黄经 .....	804
三、对整个五星动态表做行星中心差和太阳中心差 改正,得出所求会合周期内行星真实视运动表 .....	810
四、已知时间求行星位置及已知行星位置求时间 .....	811
五、行星黄纬 .....	813
第八节 余论 .....	814
第九章 宣明历术及晚唐五代宋历法 .....	815
第一节 宣明历法数和日月运动 .....	815
一、宣明历的颁行、创新及影响 .....	815
二、法数闰限与平运动的计算 .....	818
三、太阳盈缩和日度 .....	823
第二节 日月黄经和定气天文计算 .....	829
第三节 定朔推步和进朔 .....	832
第四节 日食月食的形成 .....	838
一、日食月食性质不同 .....	838
二、食甚时刻与实朔实望并不一致 .....	841

第五节 视差对天体坐标的影响 .....	844
第六节 视差对日食的影响和计算 .....	852
一、推算需要的日食要素 .....	852
二、计算月亮的赤经赤纬视差 .....	853
三、求观测者地面日月赤经相合时刻 .....	854
四、求观测地地面赤经合时刻之日月间距离 .....	856
五、计算食甚、食分和初亏、复圆时刻 .....	857
第七节 步轨漏术 .....	859
第八节 步交会术及日食三差 .....	869
第九节 晚唐五代宋历法一瞥 .....	888
第十章 元明授时集大成 .....	898
第一节 授时历制定、颁行与成就、特点 .....	898
一、授时历的制定和颁行 .....	898
二、授时历的成就与特点 .....	901
第二节 日行盈缩、月行迟疾 .....	904
一、日行盈缩的计算 .....	904
二、月行迟疾的计算 .....	913
第三节 黄赤道差、内外度及白道交周 .....	917
一、黄赤道差、黄赤道内外度的计算 .....	917
二、白道交周的计算 .....	924
第四节 五星盈缩的计算及布立成 .....	929
第五节 步气朔、步日躔及太阳过宫 .....	945
一、步气朔闰 .....	945
二、步日躔与太阳过宫 .....	953
第六节 步月离、定差距差定限度 .....	959
一、推定朔弦望加时日月宿度 .....	959
二、推定朔弦望加时赤道月度 .....	962

三、求正交日辰 .....	962
四、推正交距冬至加时黄道积度及宿次 .....	963
五、求定差距差及月离赤道正交宿度 .....	963
六、求月离赤道正交后半交白道出入赤道内外度(白道赤道 交角) .....	964
第七节 步交会术、日月食推步 .....	965
一、步交食 .....	965
二、日月食推步实例及精度 .....	973
第八节 步五星术 .....	992
一、基本法数和五星动态表 .....	992
二、五星周期数据、合应历应的精度 .....	994
三、五星推步 .....	1000
第九节 五星推步实例及其精度 .....	1009
第十节 弧矢割圆术与步中星 .....	1035
一、句股测望和弧矢割圆术 .....	1035
二、布黄赤道相求弧矢诸率立成法 .....	1036
三、里差刻漏和求黄道每度昼夜刻 .....	1038
四、步中星——求每日日出辰刻 .....	1041
五、求定差、距度、定限度 .....	1043
参考文献 .....	1044
总跋 .....	1045
补记 .....	1051

## 第六章 魏晋南北朝历法

### 第一节 乾象历

#### 一、减少斗分

乾象历是一部优秀历法，东汉灵帝时，泰山蒙阴人刘洪所献。为创制乾象历，刘洪考查日月进退、出入及古今历日十余年。乾象历有所创建和突破，较三统、四分为优。

太初历冬至日在牵牛初度。四分历于元和二年至永元元年测候 5 年，得冬至日在斗  $21\frac{1}{4}$  度，不及太初历 5 度。古历规定太阳日行 1 度，岁而周天。每岁长 365 日有余。为计算太阳所在宿度方便起见，将岁实的奇零部分放在冬至日所在的星宿，其他二十七宿的距度皆为整数。自四分历冬至在斗，始称此奇零为斗分。刘洪考验天官和日月运行十余载，领悟四分于天疏阔，皆因斗分太大之故。于是更以 589 为纪法，145 为斗分。这样。乾象历岁实（回归年）为：

$$\text{岁实} = \frac{\text{周天 } 215130}{\text{纪法 } 589} = 365\frac{145}{589} \text{ 日} = 365.24618 \text{ 日}$$

东汉末年，真实的回归年长为 365.2423032 日，四分历岁实 365.25 日，每岁后天 0.0077 日。乾象历岁实虽仍大 0.003877 日，但已较四分大为改进。乾象历称 589 为纪法，仍用 19 年 7 闰的章法。得 1 纪为 31 章、7285 个月，为纪月。周天和纪月可为 5

公约,得 43026 和 1457,分别称作通法和日法。纪 31 章,31 称为通数。故

$$\text{朔望月长} = \frac{\text{章岁} \times \text{周天}}{\text{章月} \times \text{纪法}} = \frac{\text{周天}}{\text{纪月}} = \frac{\text{通法}}{\text{日法}} = 29.53054221 \text{ 日}$$

3 世纪初年(东汉末叶),朔望月实长 29.53058533 日。乾象历朔实较天为短,小 0.00004312 日。而四分历朔实 29.530851064 日;较天长 0.00026573 日。可见,乾象历岁实、朔实比四分历都要精确得多。

1 纪 589 年、7285 月、215130 日,年月日都为整数。以 60 去纪法,余 49。故岁名干支一纪后移 49 位。纪日 215130 以 60 除,余 30。两纪后,日数可为 60 整除,朔望、节气日期干支皆可复原。故刘洪以两纪 1178 年为乾法。取太初历元丁丑岁为近距之元。又上加太初元(前 104)12 纪(7068 年)之己丑岁(前 7172)为日月五星交会之上元。所以,晋书律历志记乾象历上元己丑以来,至建安十一年(206)丙戌,岁积 7378 年。己丑算上。太初历以元封七年岁前天正甲子朔旦冬至为元。乾象历二纪后朔旦冬至复起甲子,一纪之后朔旦冬至乃在甲午。故以二纪为乾法,称内纪、外纪。内纪以甲子为纪首,外纪以甲午为首日。太初历元为乾象历 13 纪内纪甲子首日,建安十一年丙戌入甲子内纪 310 年。乾象历推步首算入纪。方法是,置上元积年(上元己丑计入),以乾法 1178 除之,不满乾法之年,如小于纪法 589,则为入内纪甲子之年;如大于纪法则去之,为入外纪甲午纪首年数。如乾象历始行之吴大帝黄武二年(223),距元 7395 年,以乾法除之,得 6 余 327,327 不满纪法 589,为入内纪甲子 327 年。

## 二、过周分和近点月

太阳在恒星背景上运行一周  $360^\circ$  的时间叫恒星年  $T$ ,其平均运动(每日平行度)以  $n$  表示,故  $T = 360^\circ / n$ 。月亮从恒星间某点



出发行天一周的时间称恒星月  $S$ , 月亮相对于恒星的平均运动(每日平行度)用  $n'$  表示, 则有  $S=360^\circ/n'$ 。日月同经, 谓之合朔。连续两次日月相合的时间间隔为朔望月  $M$ 。日月合朔以后, 太阳以速度  $n$ , 月亮以速度  $n'$  同向运动。月速日徐, 当月亮运行一周天回到出发的恒星位置时, 太阳已前行了一段距离。当月亮再次赶上太阳, 所经历的时间为朔望月。所以它的长度为  $M=360^\circ/(n'-n)$ 。此式可改写成:

$$\frac{1}{M} = \frac{n'}{360^\circ} - \frac{n}{360^\circ} = \frac{1}{\frac{360^\circ}{n'}} - \frac{1}{\frac{360^\circ}{n}} = \frac{1}{S} - \frac{1}{T}$$

称作会合运动方程。以后将严格地推导它。

恒星年  $T$  是视太阳从星空某一点出发, 运行一周, 又回到星空原出发点的时间间隔。太阳的平均运动  $n$  为  $3548''.1928$ 。由  $T=360^\circ/n=1296000/3548.1928$ , 得出恒星年  $T$  为  $365.256364$  日。反映四时寒暑变化的回归年长是视太阳中心连续两次经过春分点的平均时距。由于地轴进动, 春分点在恒星间慢慢地向西移动。每年西行约  $50''.25$ 。春分点的这种运动叫作岁差。每日春分点西移  $0''.1376$ , 称作周日岁差, 春分点运动方向与视太阳相反。由上面讨论知, 回归年  $E$  长度为:

$$\begin{aligned} E &= \frac{360^\circ}{n + \text{周日岁差 } 0''.1376} \\ &= \frac{1296000}{3548''.1928 + 0''.1376} \\ &= 365.2422 \text{ 日} \end{aligned}$$

月球循椭圆轨道绕地球公转。由于太阳的摄动, 月球轨道长轴在不停地做顺向转动, 近地点持续地向东移动。近地点对于恒星的平均运动  $\mu$  为  $400''.9167$ , 因此近地点的转动周期  $\theta$  为:

$$\theta = \frac{360^\circ}{\mu} = \frac{1296000''}{400''.9167} = 3232.5917 \text{ 日}$$

$$=8.850543 \text{ 年}=8 \text{ 年 } 310.6541 \text{ 日}$$

近地点与月亮做同向运动,类似前面朔望月的讨论,可知月亮两次过近点所历的时间为:

$$\text{近点月} = 360^\circ / (n' - \mu)$$

月亮对于恒星的平均运动  $n'$  为  $47434''.8907$ , 所以

$$\begin{aligned} \text{朔望月} &= \frac{360^\circ}{n' - n} \\ &= \frac{1296000''}{47434''.8907 - 3548''.1928} \\ &= 29.53058813 \text{ 日} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{恒星月} &= \frac{360^\circ}{n'} = \frac{1296000''}{47434''.8907} \\ &= 27.32166093 \text{ 日} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{近点月} &= \frac{360^\circ}{n' - \mu} \\ &= \frac{1296000''}{47434''.8907 - 400''.9167} \\ &= 27.55455025 \text{ 日} \end{aligned}$$

以上得出的都为现代数值,古代稍有出入。

月球在椭圆轨道上运动有快有慢。在近地点时运行最速,在远地点最缓。这一点东汉的天文学家已经发现。《续汉书·律历志》记载永元四年(92)“贾逵论历”中说,“月行当有迟疾,不必在牵牛、东井、娄、角之间,又非所谓朏、侧匿,乃由月所行道远近、出入所生。率一月移故所疾处三度,九岁九道一复。”明确指出月行轨道有远近,从而速度有疾徐,过近地点时最疾,过一近点月,近点前移3度,转动周期为9年。

根据上面介绍,“九岁九道一复”,相当于近地点对于恒星的平均运动速度为:

$$\mu = \frac{365.25}{9 \times 365.25} = \frac{1}{9} \text{ 度}$$

$$=0.1111111 \text{ 度}$$

$$=0^{\circ}.1095152=394''.2546$$

从而可知近点月相应的长度是

$$\begin{aligned}\text{近点月} &= \frac{365.25}{13.36842105 - 0.1111111} \\ &= 27.55083812 \text{ 日}\end{aligned}$$

这相当于近地点每月东行  $3.061204$  度或  $3^{\circ}.0172349$ 。

刘洪乾象历给出比贾逵论历更为准确的近点月长度和近地点平均运动数值。刘洪称一近点月亮近地点东移的数值为过周分，叫近点月长为历日数。由“月行三道术”术文，有：

$$\text{过周分} = (\text{会数} + \text{天地凡数}) \times \text{余率}^2 / \text{会数}$$

$$\text{历日数} = (\text{过周分} + \text{周天}) / \text{月周}$$

乾象历采用太初历年为内纪甲子元。有些法数也沿用之。式中，会数 47，周天 215130，天地凡数 55（取自易经系辞），余率 29，月周 7874，代入后

$$\begin{aligned}\text{过周分} &= (47 + 55) \times 29^2 / 47 \\ &= 1825 \frac{7}{47} = 1825.148936\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{历日数} &= \left( 215130 + 1825 \frac{7}{47} \right) / 7874 \\ &= 27.55335902 \text{ 日}\end{aligned}$$

历日数即近点月，以周日法 5969 除历周亦可得出。

$$\text{近点月} = \frac{\text{历周 } 164466}{\text{周日法 } 5969} = 27 \frac{3303}{5969} = 27.55335902 \text{ 日}$$

其中余数 3303，称周日分，以减周日法 5969，得周虚 2666。

以纪法除周天得周天度，则度法为 589 分。

将会合运动方程，两端各乘以  $T$ ，得：

$$\frac{T}{S} = \frac{T}{M} + 1$$

汉人不识岁差，太初、四分、乾象诸历皆以太阳日行 1 度，岁行周天。视回归年  $E$  为恒星年  $T$ ，其值等于周天度。所以上式变成：

$$\frac{\text{周天度}}{\text{恒星月}} = \frac{\text{回归年}}{\text{朔望月}} + 1$$

因为恒星月  $S = \text{周天度} / n'$ ，故以恒星月除周天度，即得前面说的月亮平均运动  $n'$ （月每日平行度）。

$$\text{回归年} / \text{朔望月} = \text{章月} / \text{章岁} = 235 / 19$$

所以

$$\text{月每日平行度} = \text{章月} / \text{章岁} + 1$$

$$= \frac{235}{19} + 1 = \frac{254}{19} = \frac{\text{小周 } 254}{\text{章岁 } 19} = 13 \frac{7}{19} \text{度}$$

因

$$\text{小周} \times \text{通法} = \text{月周}$$

$$\text{章岁} \times \text{通法} = \text{纪法}$$

故

$$\text{月每日平行度} = \text{月周} / \text{纪法}$$

即

$$\text{月每日平行分} = \text{月周 } 7874$$

$$\text{日每日平行分} = \text{纪法 } 589$$

$$\text{周天分 } 215130。$$

因

$$\text{近点月} = \text{周天分} / (\text{月每日平行分} - \mu) = \frac{215130}{(7874 - \mu)}$$

$$7874 \times \text{近点月} - \mu \times \text{近点月} = 7874 \text{ 近点月} - \text{过周分}$$

$\mu$  为近地点的平均运动（每日平行）， $\mu \times \text{近点月}$  为一近点月近点东移之值，即过周分。由

$$7874 \times \text{近点月} - \text{过周分} = 215130$$

知道近点月,可得出过周分;晓得过周分,可求出近点月。乾象历有:

$$\text{近点月} = \frac{\text{历周}}{\text{周日法}} = \frac{164466}{5969} = 27.55335902 \text{ 日}$$

故

$$\begin{aligned}\text{过周分} &= 7874 \times 27.55335902 - 215130 \\ &= 1825.1489 = 1825 \frac{7}{47}\end{aligned}$$

过周分化为度(度 589 分),得近地点每月(近点月)东移 3.098724849 度( $3^{\circ}.0541$ )。

$$\text{近点月(历日数)} = (215130 + \text{过周分}) / 7874 (\text{月周})$$

这就是“月行三道术”给出的近点月计算式。式中,代入历日数=历周 164466/周日法 5969,可得出  $\mu = 66.24052$  分,以 589 除之,化为度,  $\mu = 0.11246$  度。化为  $360^{\circ}$  制,得  $\mu = 0^{\circ}.110847 = 399''.05$ 。

由此看出,刘洪给出的近点月和近地点东移平均运动  $\mu$  值,比贾逵论历给出值有很大提高,与现代测得数值已相去不远了。

### 三、月行迟疾与定期计算

乾象历首次将月行迟疾引入历法计算。并创制月离表为后代历法所效法。月离表给出月亮在一个近点月中每日的实际行度、行分,及每日月亮实位置与平位置的差数。根据它可以计算任意时刻月亮的实际位置,并由月亮平实位置之差,改正月亮与日相合,得到定期时刻。定期定望的计算,提高了日食月食预报精度,中国历法推步从此进入一个新的历史时期。

月离表是计算月所在度分及定朔望时刻的基础。乾象历月离表由下列五栏数值组成。

日转度分,为一个近点月内月亮每日实行度分,自近地点

开始。

列衰,次日与本日月实行分之差。由近地点至远地点半周,月速由快至平而慢,远地点为月速最小之处。此半周速度减慢为退段;由远地点至近地点半周,月速由慢而平至快,为进段。退段、进段各以中点速度为平。近地点至平,列衰为退减;平至远地点列衰为退加。远地点至平列衰为进减;平至近地点列衰为进加。其加减实际上是由下栏损益率的绝对值确定的。

损益率,为每日月实行与平行分之差值。退段(近地点至远地点半周)实行分大于平行分为益,反之为损;进段(远地点至近地点半周)实行分小于平行分为益,实行大于平行为损。

盈缩积,其前各日损益率的累计值。退段,实月总在平月之前,为盈;远地点至近地点半周(进段),实月常居平月之后,为缩。

月行分,将每日第一栏月亮的实行度,按度 19 分,所化的月实行分。

关于各栏的损益、盈缩、加减符号的含义和其间关系,第七章中将做详细讨论。

乾象历计算定朔方法如下。

#### (1)推求平朔

$$\frac{\text{入纪年} \times \text{章月} \ 235}{\text{章岁} \ 19} = \text{定积月} \frac{\text{闰余}}{19}$$

闰余大于 12,是岁有闰。

$$\text{假积日} = \text{定积月} \times \text{通法} \ 43026$$

$$\text{假积日} / \text{日法} \ 1457 = \text{定积日} + \text{小余} / \text{日法}$$

$$\text{所求年天正月平朔大余} = [\text{定积日} / 60]_R$$

以 60 去积日,所余为天正平朔大余。以所入纪首干支计数,纪首干支不计,即得所求年天正月平朔干支。递加朔望月得各月平朔大小余。

#### (2)推合朔入历(平朔在近点月中的位置)

以上元积月乘朔行大小分,小分满通数 31 从大分,大分满历周 164466 去之,余满周日法 5969 得 1 日,不尽为日余。日余命算外即得。

$$\text{朔行大小分} = \text{半小周} \times \frac{\text{通法}}{\text{通数}} - \text{历周} = 11801 \frac{25}{31}$$

代入各法数得朔行大分 11801,小分 25。日法 1457,周日法 5969,可为会数 47 整除,分别得到通数 31 和半小周 127。所以朔行大小分实际上是以周日法分表示的朔望月与近点月的分数差。即:

$$\frac{\text{朔行大小分 } 11801 \frac{25}{31}}{\text{周日法 } 5959} = \text{朔望月} - \text{近点月}$$

乾象历上元为甲子朔旦冬至齐同,又为日月交会、五星合日、月在最卑(近地点)的时刻。因此根据上述术文即可得出所求合朔入历日数。

$$\text{上元积月} \times \text{小分} / 31 = N + \text{余分} / 31$$

$$\text{合朔入历日} + \frac{\text{日余}}{5969} = \left[ \frac{\text{上元积月} \times \text{朔行大分} + N}{\text{历周 } 164466} \right]_R \frac{\text{周法 } 5969}$$

一般可用

$$\left[ \frac{\text{上元积月} \times \text{朔行大小分 } 11801 \frac{25}{31}}{\text{历周 } 164466} \right]_R \frac{\text{周法}}{5969} = \text{合朔入历日} \frac{\text{日余}}{5969}$$

算出。所得日数即合朔入近点月日数及日余。

依次递加  $1 \frac{5832 \frac{25}{31}}{5969}$  日,得各月入历日及余。以周日法除朔行

$$\text{大小余} \left( \frac{11801 \frac{25}{31}}{5969} \right) \text{即得 } 1 \frac{5832 \frac{25}{31}}{5969} \text{ 日。}$$

## (3)求定朔大小余

由所得合朔入历日查月离表,得到该日的月行分、盈缩积和损益率。再由下式计算加时盈缩和差法,以修正平朔大小余。

$$\text{加时盈缩} = \text{入历盈缩积} \times \text{通周 } 185039$$

$$\pm \text{日余分} \times \text{通数 } 31 \times \text{损益率}$$

$$\text{差法} = (\text{月行分} - \text{章岁 } 19) \times \text{周半 } 127$$

$$\text{定朔大小余} = \text{平朔大小余} \pm \frac{\text{加时盈缩}}{\text{差法}}$$

盈减缩加。由于

$$\text{通周 } 185039 = \text{周半 } 127 \times \text{日法 } 1457$$

$$= \text{通数 } 31 \times \text{周日法 } 5969$$

$$\text{差法} = (\text{月行分} - \text{章岁}) \times \text{通周} / \text{日法}$$

$$\text{加时盈缩} = \text{入历盈缩积} \times \text{通周}$$

$$\pm \frac{\text{日余分}}{\text{周日法}} \times \text{通周} \times \text{损益率}$$

$$\text{定朔大小余} = \text{平朔大小余}$$

$$\pm \frac{\text{入历盈缩积} \pm \frac{\text{日余分}}{\text{周日法}} \times \text{损益率}}{\text{月行分} - \text{章岁}} \times \text{日法}$$

日余分/周日法为入历日的小数部分,章岁为太阳的日平行分。由此得出,经过月亮迟疾运动改正的定朔日期、时刻。由上式可看出“加时盈缩”,由月离表盈缩积线性内插得出。刘洪用线性内插方法计算月亮迟疾运动的改正。

计算定弦、定望方法与此相同。

乾象历谓,“月经四表,出入三道,交错分天,以月周(7874)除之,为历之日。”称月行三道,中道即黄道;内道为阴历,月入黄道北;外道月行黄道南,为阳历。以月亮相对于恒星的平均运动  $n'$  除周天为恒星月。以章岁为度分,月平均运动为小周 254;以纪法为度分,月平均运动为月周 7874。以纪法 589 为度分表示的周天



是 215130 分。以月周除周天分,为历之日,此“历之日”即恒星月。故

$$\text{恒星月} = \frac{\text{周天}}{\text{月周}} = 27 \frac{2532}{7874} = 27.32156464 \text{ 日}$$

乾象历首次在历法中给出月入阴阳历的数表。表中列半个恒星月  $13 \frac{5203}{7874}$  日中,每日月亮距黄道的度分,称作兼数。这个角度是沿着过天极、月亮的大圆(赤经圈)量度的。因与沿黄经圈测得的黄纬不同,学者称之为极黄纬。表中并列出相邻两日兼数之差“损益率”及损益率之差“衰”值。利用此表及线性内插法可以求出任何日时的兼数——月亮的极黄纬值。

刘洪不仅给出月亮每日极黄纬的数值,并首次引进交食的食限概念和大小。日月合望如发生在食限之内,为入食限,有可能出现交食。月行三道。月亮在交点月中的位置如在前限之前、后限以后时月行中道——黄道。朔望时月行中道则可能有交食发生。乾象历在月行阴阳历表中首次给出了前限和后限的数值。

$$\text{前限 } 1 \frac{1290}{7874} \frac{457}{2209} \text{ 日; 后限 } 12 \frac{3912}{7874} \frac{1752}{2209} \text{ 日。月周 } 7874 \text{ 为月}$$

每日平行分,即平均运动  $n'$ 。前限加后限为  $13 \frac{5203}{7874}$  日,正好是半个恒星月。

$$\begin{aligned} \text{前限} + \text{后限} &= \frac{1}{2} \times 27 \frac{2532}{7874} \\ &= 13 \frac{5203}{7874} \\ &= \frac{\text{历周 } 107565}{\text{月周 } 7874} \end{aligned}$$

$$\text{前限} = \frac{1}{2} \text{ 恒星月} - \text{后限}$$

兼数表示月行黄道南北而距黄道的度数,是因为月行轨道与黄道不在一个平面的缘故。黄道面与月轨面约有  $5^{\circ}9'$  的交角。两面相交为一直线,此线在天球所指的两点称作黄道、月道(白道)的交点。月由黄道南(外道、阳历)进入黄道北(内道、阴历)所经过的那个交点叫升交点,与它相对的称作降交点。在升降交点正中间,月亮离开黄道最远,这时兼数最大。显然,在升、降交点,兼数为 0。所以,兼数大小是随月亮在轨道上距交点远近而异的。

由于日、地、月三者中心不在同一平面,因此太阳对月球的摄动力就在轨道面的正交方向有一个法向分量。由它的作用,月球的交点不停地沿黄道向西移动,即逆着月亮本身的运动方向。经精密计算和测定,得出月球交点对于恒星的平均运动  $v$  为  $-190''.7717$ 。负号表示它与月亮轨道运动方向相反。由前面介绍可知,月亮交点的旋转周期为  $\frac{360^{\circ}}{190''.7717} = \frac{1296000''}{190''.7717} = 6793.46$  日(18.6 年)。

朔望发生在月亮交点附近时,日地月近乎在一条直线上。这时就会出现日月食现象。朔望时日月距交点越近,发生交食的机会越多;距交点超出某一数值就不会出现交食。所以食限也是由日月距交得出的。月亮从升交点出发向东运行,又回到升交点的时距称作交点月;太阳连续两次过升交点所历时间叫食年。因交点运行方向与日月相反,由前面介绍的方法知:

$$\text{食年} = \frac{360^{\circ}}{n-v} = \frac{1296000''}{3548''.1928 + 190''.7717} = 346.62003 \text{ 日}$$

$$\text{交点月} = \frac{360^{\circ}}{n'-v} = \frac{1296000''}{47434''.8907 + 190''.7717} = 27.21222 \text{ 日}$$

而

$$\text{恒星月} = \frac{360^{\circ}}{n'} = \frac{1296000''}{47434''.8907} = 27.321661 \text{ 日}$$

恒星月是月亮行天一周所需的时间。因交点向西移动,好像

是迎着月亮而行。所以月亮连续两次经过同一交点的时间比恒星月来得短一些。

乾象历推月食,以 47 章为 1 会,会岁 893,会月 11045,会率 1882。一会 893 岁有 1882 食。每食  $\frac{11045}{1882}$  月,即  $5\frac{1635}{1882}$ 。朔望合数 941,为会率之半,乃 1 会 47 章日行交周之数。故乾象历交周为:

$$\text{交周(食年)} = \frac{\text{会月 } 11045}{\text{朔望合数 } 941} = 11\frac{1388}{1882} \text{ 月} = 346.61513 \text{ 日}$$

由

$$\text{食年} = \frac{\text{周天度 } 215130}{\text{日平行度} + \text{交点日西移度}} = \frac{215130}{589 + v}$$

代入乾象历食年值,得:

$$589 \times \text{食年} + \text{食年} \times v = 215130$$

$$\text{食年} \times v = 215130 - 204156.3124 = 10973.6876$$

$$v = 31.65957457 = 0.0537514 \text{ 度}$$

可得到乾象历交点月为:

$$\text{交点月} = \frac{215130}{(7874 + 31.6596)} = 27.21215074 \text{ 日}$$

四分历交周(食年)为  $11\frac{17}{23}$  月(346.6665116 日),乾象历精度

有了较大的提高。但乾象历不知交点月。兼数、食限(前限、后限)由恒星月得出。虽恒星月、交点月相差不大,但天文意义不明确,是乾象历美中不足之处。

乾象历朔合分  $18328\frac{914}{2209}$ ,由下式得出:

$$\text{朔合分} = \text{周天 } 215130 \times \frac{\text{朔望合 } 941}{\text{会月 } 11045} = 18328\frac{914}{2209}$$

$$\frac{\text{朔合分}}{\text{月周}} = \frac{18328\frac{914}{2209}}{7874} = 2\frac{2580}{7874}$$

$$=2 \times \text{前限} = 2 \times 1 \frac{1290 \frac{457}{2209}}{7874} \text{日}$$

$$\text{朔合分} \times \frac{11045}{941} = 18328 \frac{914}{2209} \times \frac{11045}{941} = 215130$$

两端各以月周除之,得:

$$\frac{\text{朔合分}}{\text{月周}} \times \frac{11045}{941} = \frac{18328 \frac{914}{2209}}{7874} \times \frac{11045}{941} = \frac{215130}{7874} (\text{恒星月})$$

$$2 \times \text{前限} \times 2 \times 5 \frac{1635}{1882} = \text{恒星月} = 27.32156464 \text{日}$$

根据前面讨论,月亮极黄纬(兼数)、食限应该由交点、交点月推算。前已得出乾象历交点月应为 27.21215074 日。故

$$\text{朔交行分} / \text{月周} 7874 \times \text{交周} \frac{11045}{941} = \text{交点月}$$

$$\frac{\text{朔交行分}}{\text{月周}} = \frac{\text{交点月 } 27.21215074}{\text{交周 } 11.73751328} = 2.318391476 \text{日}$$

$$\text{交点月} + \frac{\text{朔交行分}}{\text{月周 } 7874} (2.318391476)$$

$$= \text{朔望月} = 29.53054222 \text{日}$$

推朔入阴阳历与推合朔入近点月历日成为完全类似的计算。并且朔交行分与朔行分也具有完全类似的天文意义。

$$\text{近点月 } 27.553359 + \frac{\text{朔行分}}{\text{周日法}} \left[ 1 \frac{5832 \frac{25}{31}}{5969} \right] = 29.5305422 \text{日}$$

于是,可仿照计算月入近点月历日,得出推朔入阴阳历方法。

以会月去上元积月,余以朔交行日分乘之,得数满交点月去之,其余不满半交点月者,为入阳历;满去之,余为入阴历。所余日数为合朔入历,不尽为日余。

累加朔交行 2.318391476 日,得各月入历,满半交点月去之,阴历入阳历,阳历入阴历。

也可直接以上元积月乘朔交行日,满交点月去之,余在半月以下入阳历,以上去半月,入阴历。

入历在前限前、后限后者为月行中道。

乾象历减少斗分,得到较精密的回归年、朔望月长度;给出过周分、近点月数值;首次将月行迟疾引入历法,创作月离表及定朔、定望计算法,使历法推步迈上了一个新的台阶;提出月行阴阳、出入三道、兼数、前限、后限等新概念和计算方法。总之,乾象历创法很多,确为“后代推步之师表”。

献帝建安元年(196),郑玄受其法,以为穷幽极微,又加注释。吴中书令阚泽受刘洪乾象法于东莱徐岳,又加解注。两注今皆不存。吴中常侍王蕃以洪术精妙,用推浑天之理,以制仪象及论。三国孙吴用乾象历,自大帝黄武二年(223),直至吴亡(280)。

## 第二节 景初历

597

三国时期,孙吴施行乾象历,蜀汉沿用四分历。魏文帝初用四分历。至明帝景初元年(237),尚书郎杨伟造景初历。表上,帝遂改正朔,颁行之,直到魏亡。晋代魏,武帝泰始元年(265),因魏之景初历,改名泰始历。景初日中晷影,即用后汉四分法,是以渐就乖差,其推五星,则甚疏阔。晋江左以来(317年以后),更用乾象五星法以代之。两晋一直行用景初,无所改作。北魏太祖天兴初(398),命太史令晁崇修浑仪以观星象,仍用景初历,至太平真君十二年(451)。文成帝兴安元年(452)以赵攸所修玄始历,以代景初。420年六月,宋王刘裕代晋,是为宋武帝。改泰始历为永和历继续沿用,至元嘉二十二年(445)诏行元嘉历为止。景初历自景初元年(237),历代行用,至宋元嘉二十一年(444)、北魏太平真君十二年(451),前后共行用215年。

杨伟推考天路，稽之前典，验之以食朔，查知四分历行至汉末，日食率常在晦。皆因斗分太多，故先密后疏而不可用。景初历测定斗分，推定纪法，采用的岁实、朔策较四分为优，与乾象历相近。其数如下：

$$\text{朔策} = \frac{\text{通数 } 134630}{\text{日法 } 4559} = 29 \frac{2419}{4559} = 29.53059882 \text{ 日}$$

$$\text{岁实} = \frac{\text{周天 } 673150}{\text{纪法 } 1843} = 360 \frac{9670}{1843} = 365 \frac{455}{1843} = 365.24688 \text{ 日}$$

其朔策较密，因保留 19 岁 7 闰 235 月的章法，岁实（回归年）的数值稍大。

景初历以 1843 年为一纪，当 97 章。22795 月为一纪之月（ $97 \times 235$ ），纪日 673150。纪日去 60，余 10。一纪之后，纪首日名干支移动 10 位，故以 6 纪 11058 年为一元。元为朔旦冬至及纪日干支复原的周期。景初历以公元前 3809 年壬辰岁为历元。壬辰元至景初元年丁巳岁（237）积 4046 年，壬辰岁计入，此元以天正建子黄钟之月为历首。元首之岁，夜半甲子朔旦冬至。但壬辰历元并非日月交会、月居最卑之时。因此景初历给出壬辰元及 6 纪纪首至朔齐同夜半时的交会与迟疾的差率数值。这是与其前三统、四分及乾象诸历相异之处。

$$\text{景初历近点月} = \frac{\text{周通 } 125621}{\text{日法 } 4559} = 27 \frac{2528}{4559} = 27.55450757 \text{ 日}$$

会通 790110 犹会月，通数 134630 如乾象历会率，朔望合数为会率之半，乃会月交周之数。

$$\text{以通数除会通得 } 5 \frac{116960}{134630} \text{ 月而 } 1 \text{ 食。}$$

$$\text{交周(食年)} = \frac{\text{会通 } 790110}{\text{朔望合数 } 67315}$$

$$= 11 \frac{49645}{67315} \text{ 日}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\text{会通}}{\text{朔望合数}} \times \frac{\text{通数}}{\text{日法}} \\
 &= \frac{\text{会通}}{\text{朔望合数}} \times 2 \times \frac{\text{朔望合数}}{\text{日法}} \\
 &= 2 \times \frac{\text{会通}}{\text{日法}} = 2 \times 173 \frac{1403}{4559} \text{日} \\
 &= 346 \frac{2806}{4559} \text{日} \\
 &= 346.6154858522 \text{日}
 \end{aligned}$$

$$\text{一交(半食年)} = \frac{\text{会通}}{\text{通数}} = 5 \frac{11696}{13463} \text{月} = \frac{\text{会通}}{\text{日法}} = 173 \frac{1403}{4559} \text{日}$$

会通 = 朔望合数 67315 + 入交限数 722795

两端各以日法除之,得:

$$\frac{\text{会通}}{\text{日法}} = \frac{\text{朔望合数}}{\text{日法}} + \frac{\text{入交限数}}{\text{日法}}$$

$$\text{半食年} = 173 \frac{1403}{4559} = 14 \frac{3489}{4559} + 158 \frac{2473}{4559} \text{日}$$

景初历不识岁差,日每日平行1度,1岁日数即周天度数。因此,以日法(度法)表示的朔望合数和入交限数就分别是景初历交食的前限和后限。朔望去交分,如朔望合数以下,入交限数以上者,朔则交会,望则月食。

景初历6纪纪首日名、交会、迟疾差率为:

甲子纪第一 纪首合朔,月在日道里(北)

交会差率 412919 迟疾差率 103947

甲戌纪第二 纪首合朔,月在日道里(北)

交会差率 516529 迟疾差率 73767

甲申纪第三 纪首合朔,月在日道里(北)

交会差率 620139 迟疾差率 43587

甲午纪第四 纪首合朔,月在日道里(北)

交会差率 723749      迟疾差率 13407

甲辰纪第五 纪首合朔,月在日道表(南)

交会差率 37249      迟疾差率 108848

甲寅纪第六 纪首合朔,月在日道表(南)

交会差率 140859      迟疾差率 78668

上面说过,一交周(食年)有两交,每交日数为会通/日法, 173.307743 日。交会差率为会通的分数,因元首不在日月交会故其数不为零。如壬辰元首(即甲子纪第一纪首)甲子朔旦冬至子夜, 交会差率 412929,以日法 4559 除,得  $90 \frac{2609}{4559}$  日(90.572275 日)。这表示壬辰元甲子朔旦冬至夜半在交点后 90.572275 日。经过一纪之后,到达甲戌纪第二纪首,甲戌冬至朔旦夜半时,交会差率 516529,以日法除之,得  $113 \frac{1362}{4559}$  (113.29875) 日。为甲戌纪首距其前交点的日数。由上列数据看出,每纪后交点差率递增 103610 分,此数称作交会纪差。以日法除,得  $22 \frac{3312}{4559}$  (22.7264751 日)。即每纪后,纪首距交点增加 22.726475 日(度)。当纪首交差递增大于会通 790110 时,表示月距原交点超过半交周,去之。于是月由日道里(北)而至日道表(黄道南),余数以日法除,为距新交点之度(日)。

一纪 22795 月(673150 日)不是交周(食年)或交(半食年)的整数倍。以半食年除纪日(周天)所得的交数及余数,其余数即为交会纪差。由交数奇偶可知一纪后月所在黄道的表里。具体计算如下:

$$\text{纪月} \times \frac{\text{通数}}{\text{会通}} = 22795 \times 134630 / 790110 = 3884 \frac{103610}{790110}$$

$$\text{交会纪差} = [\text{纪月} \times \text{通数} / \text{会通}]_R = 103610$$

一纪有 3884 交(食)及余数 103610。3884 交为 1942 交周(食年),故一纪后月在黄道表里同前,但入交分增加交会纪差之值。



人交分满会通去之,月在黄道表里易位。

迟疾差率表示纪首时月入近点月的日数。如甲子纪首迟疾差率 103947。说明甲子冬至朔旦夜半距其前近地点 103947/日法  $4559 = 22 \frac{3649}{4559}$  日 = 22.8003948 日。一纪后,甲戌纪首,迟疾差率 73767,表示甲戌纪首夜半入历(距其前近地点)  $16 \frac{823}{4559}$  (16.180522) 日。每纪迟疾差率递减 30180 分,此值称作迟疾纪差。

$$\begin{aligned}\text{迟疾纪差} &= \text{通周} - [\text{纪月} \times \text{通数} / \text{通周}]_R \\ &= 125621 - [22795 \times 134630 / 125621]_R \\ &= 30180\end{aligned}$$

由近点月长除纪日 673150,得一纪有  $24429 \frac{95441}{125621}$  近点月(转周),即有 24429 个近点月又 95441 余分。近点月长(通周) 125621 分,一纪比 24430 个近点月少 30180 分。一纪有多少个近点月由下式得出:

$$\text{纪月} \times \text{通数} / \text{通周} = 24429 \frac{95441}{125621} \text{转周}$$

每纪后月所处近点月的位置都要后退 30180 分,或  $6 \frac{2826}{4559}$  日 (6.61987278 日)。以之转减前纪,则得次纪月亮入转。不足减时,加通周 (125621) 或近点月 ( $27 \frac{2528}{4559}$  日或 27.55450757 日) 减之。

景初历有明确的去交度分和交食食限概念。首次引入以入交限数计算交食的方法。推交会月食,以去交 15 度为法,论亏食多少;以及计算日月食亏食方位等,也都是景初历的创新。

景初历推合朔、交会、月食术情况如下。

## (1)推朔积月

$$\text{积年/纪法} = \text{入纪次第} + \text{入纪年/纪法}$$

$$\text{入纪年} \times \text{章月/章岁} = \text{积月} + \text{闰余}/19$$

闰余 12 以上,其年有闰,闰月以无中气为准。

## (2)推朔日

$$\text{朔积分} = \text{通数} \times \text{积月}$$

$$\text{朔积分/日法} = \text{积日} + \text{小余/日法}$$

$$\text{天正朔大余} = [\text{积日}/60]_R$$

以 60 去积日,余为大余。大余以纪名数起,纪名不计,得天正十

一月朔干支,加  $14 \frac{3489}{4559}$  日得望。

## (3)求朔望去交度分及合朔交会月食

$$\text{天正合朔去交度分}$$

$$= [(\text{入纪朔积分} + \text{纪下交会差率值})/\text{会通}]_R$$

$$\text{次朔去交度分}$$

$$= [(\text{天正朔去交度分} + \text{通数})/\text{会通}]_R$$

$$\text{月望去交度分}$$

$$= [(\text{其月合朔去交度分} + \text{朔望合数 } 67315)/\text{会通 } 790110]_R$$

朔望去交分,如小于朔望合数,或大于入交限数(722795),朔则交会,望则月食。

## (4)推合朔交会月食月在日道表里

$$\text{入交周分} = \left[ \frac{\text{朔积分} + \text{入纪下交会差率}}{2 \times \text{会通}} \right]_R$$

所得余数即入交周分。如不满会通,则天正合朔月所在随所入纪首表里。若大于会通,天正合朔月所在与所入纪首表里易位。

## (5)求去交度及食分

去交在朔望合数以下,则

去交度分 = 去交分 / 日法

去交在入交限数以上, 则

去交度分 = (会通 - 去交分) / 日法

食分, 以 15 为法。去交度大于 15 度, 交而不食; 去交度 10 以下肯定有食; 10~15, 亏食微小仅光影相及。合望正在交点者去交度为零, 全食。

景初历月离表每日月行迟疾度分及月行分与乾象历略有增损。因而损益率、盈缩积分数值稍有不同。二十八宿赤道宿度, 除减少斗分外皆同后汉四分历, 为西汉所测, 直至唐大衍历方始改易。没有列出黄道宿度。晷漏表除无黄道进退数外, 全沿后汉四分历之旧, 而无所变更。

五星的基本推步法数, 乾象、景初大致皆依四分。斗分为乾象所增, 景初因之, 其值为:

五星斗分 = 斗分 455 × 五星合终合数

603

四分历五星会合运动给出通率日行数值。五星的恒星周期  $T$ , 可由

恒星周期  $T = \text{周天} / \text{通率日行}$

得出。乾象历、景初历没有给出通率日行。但可由一终日数及所行星度推出。计算景初历五星日行、会合、恒星周期结果列于表 6-1 中。

除土星外, 景初历五星运动不及四分历准确, 也较乾象历逊色。

表 6-1 景初历五星参数

	通率日行	恒星周期(日)		会合周期(日)	
		景初	今值	景初	今值
木星	0.08446	4324.381	4332.59	398.942	398.88
火星	0.53222	686.266	686.98	780.815	779.94
土星	0.03398	10747.520	10759.2	378.096	378.09
金星				584.088	583.92
水星				115.873	115.88

乾象历推合朔用日法,推迟疾用月法,推月入三道阴阳历用月法,各异其法。景初历步朔望、交会、入转皆用日法,用法简约。此李淳风麟德历总法之所本。其岁实稍逊于乾象,但朔策较之为优。景初壬辰元首不为日月交会,月过最卑之时,各纪首日皆有交会、迟疾差数,此又为统天历诸差、授时历各应的源头。景初历之创法,尤以交食推步为其代表。阴阳、去交皆以交点入算,给出前限、后限数值,以去交 15 度为法,论亏食多少,以及关于日月食亏起的方位讨论等,皆为后世历家所效法。

### 第三节 元嘉历和大明历

420 年,刘裕代晋,国号宋,史称刘宋。刘宋初行景初历。宋文帝元嘉二十年(443),诏令于宋二十二年(445),普用元嘉历。直到宋顺帝禅位于齐、宋亡(479)。齐沿用 24 年,亡于梁(502)。梁代齐后仍循行元嘉历 8 年,共行 65 年。梁天监九年(510)颁行大明历。梁、陈两朝一直行用大明历,至陈亡(589),凡 80 年。元嘉历为何承天所撰修,大明历系祖冲之创制。两历为南朝施行的主要历法。

## 一、元嘉历

何承天自幼随其舅习天文历数。他的舅舅晋秘书监徐广素善其事。自永和年间(345~356)至太元(376~396)之末,观天四十多年,并记录下日月五星的运动。此后,何承天继续观测,“比岁考校,至今又四十载”。故对七曜运行,离合去来,其疏密差会,皆有新的认识。俟元嘉二十年(443)献元嘉历,何承天上表称“自昔幼年,颇好历数,耿情注意,迄于白首”。是年已74岁高龄。所以,元嘉历是继承前贤并依据观测制订出来的。

经过两汉、魏晋多年的观测积累,中国天文历法的历理和推步在东晋、十六国时期出现了一些突破。其一是东晋初年会稽人虞喜发觉冬至日躔有每岁渐差,因分天周与岁周而立岁差之法。太阳一回归年所行度数,不足周天之度,所差就是岁差。虞喜认为冬至日所在“五十年退一度”。自此,历法中天自为天,岁自为岁。其二,后秦姚兴时,当刘宋孝武太元九年(384),岁在甲申,天水姜岌造三纪甲子元历,首创以月食检日宿度所在,为历术者宗焉。并首次提出冬至日在斗17度近天之说。其三,北凉沮渠蒙逊玄始元年(412)颁行赵馥玄始历。第一次在历术中采用章岁600,章月7421,章闰221的新闰率,始破19年7闰235月的旧章法。岁实、朔策数有奇零,不能公约。19个回归年与235个朔望的长度非常接近。至今农历的闰月安排还大致遵循19年7闰的章法。这个闰率自古六历以来,一直为历法沿用。但235个朔望月比19回归年稍长。严格计算可知19个回归年约当234.9970616个朔望月。所以三统、四分、乾象、景初诸历按19岁235月章法很难得出合天的岁实朔策。如景初历朔策比较合天,但囿于19岁7闰章法,所得岁实就要稍大于天。若测得合天的岁实,依据旧章法,朔望月必小于天。依天,回归年长约当

12.3682765个朔望月。按19岁235月章法,得12.36842105月。据赵耿章岁600,章月7421,章闰221,每岁为12.3683333月。显然玄始历于天接近。

何承天根据《尚书·尧典》四仲中星的记载,尧时“日永星火,以正仲夏”,元嘉时季夏火中;尧时“宵中星虚,以殷仲秋”,元嘉时季秋虚中。尧宋相距2700余年,以中星考查,已相差二十七度。故认为冬至日躔约百年退1度。他又根据月食检日所在宿度,来与按景初历推日度术所得结果比较,算得是时冬至应在斗17度,与四分、景初之斗21度相差4度。又由史官受诏,以土圭测景,考校日至,所得较景初早3日有余。何承天说,今历书给出的二至,非天之二至。天之南至,日在斗十三四矣。何承天依据观测得到的冬至日躔是比较合天的。经作者核算,元嘉二十年(443)冬至赤道日躔斗 $12^{\circ}.9061$ ,合中历13.0943度,与何承天所得相差不足1度。元嘉历认识到19年7闰,闰数微多,宜改法易章,因嫌运算滋繁,仍用旧章法。合朔月食,理应当历朔望。因月有迟疾,元嘉历拟以盈缩定其小余,采用定期定望。景初历晷漏表未经实测,全部沿袭四分旧数。其值春分日长,秋分日短,冬至后昼漏率长于冬至前,且长短增减,进退无渐。元嘉历重新给出晷漏刻表各项数值。二至二分,各据其正。则冬至前后完全对称,不复差异。元嘉历改用建寅正月和雨水中气为历元气朔。因雨水日在室宿,故将回归年的奇零改为室分,不用斗分。以608为纪,半纪304为度法,75为室分。故元嘉历的回归年长 $365\frac{75}{304}$ 日。

宋文帝认为,何承天所陈,殊有理据,诏“可付外详之”。太史令钱乐之、兼丞严粲以元嘉十一年至十七年五次月食食既时的位置,按月食所冲,考日之所在。与景初历日度相较,补充论证冬至之日,日并不在斗21度少,并在斗17度半间,“悉如承天所上”。

又用元嘉十一至二十年土圭测景所得日景极长,与景初历冬至日期比较,“寻校前后,以影极长为冬至”,均在历前3日。得出结论说,以月食检日所在已差4度。土圭测影,冬至又差3日。今之冬至乃在斗14间,又如承天所上。但他们对采用定朔定望持保留态度,说,“承天法每月朔望及弦皆定大小余,于推交会时刻虽审,皆用盈缩,则月有频三大、频二小,比旧法殊为异”,“愚谓此一条自宜仍旧”。员外散骑郎皮延宗也反对改行定朔定望。何承天年已垂老,未再坚持,乃改新法依旧术,不复每月定大小余。于是,元嘉历于二十二年(445),得诏施行。

元嘉历以公元前5261年庚辰岁甲子纪首为元。至元嘉二十年(443)癸未积5703年,算外(庚辰岁不计入)。以608年为纪,6纪3648年为元。纪月7520,纪日222070。以60去纪日,余10。一纪后纪首日名干支移后10日。历以甲子纪首为元,所以二纪纪首甲戌,三纪纪首甲申,四纪甲午,五纪甲辰,六纪甲寅。6纪为元,6纪后朔旦雨水齐同,日得甲子。日名、朔、气全可复原。但元首及元嘉历上元并非日月交会及月过最卑(近地点)之时。这一点和6纪为元,元嘉历是效法了景初历的做法。由于元嘉历将纪法半之取作度法,并改斗分为室分。所以法数中比景初历增加度法( $\frac{1}{2}$ 去纪法)。这样,回归年的奇零是室分/度法,而景初历为斗分/纪法。因纪法二分为度法,所以纪日外,另有周天。

元嘉历岁实朔策为:

$$\begin{aligned}
 \text{回归年} &= \frac{\text{纪日}}{\text{纪法}} = \frac{222070}{608} = 365 \frac{150}{608} = 365 \frac{75}{304} \\
 &= 365.24671 \text{ 日} \\
 &= 365 \frac{\text{度分}}{\text{度法}} = 360 \frac{1595}{304} = 360 \frac{\text{余数}}{\text{度法}} \\
 &= 360 \frac{3190}{608} \text{ 日}
 \end{aligned}$$

回归年长由度法化为度分,即:

$$\text{回归年} = 365 \frac{75}{304} = \frac{111035}{304} = \text{周天/度法}$$

太阳日行 1 度(304 分),岁行 111035 分,恰好是元嘉历给出的周天值。可见,何承天虽承认有岁差,并由《尧典》四仲中星得出冬至日躔约百年退行 1 度。但他在历法中没有引进岁差。元嘉历中岁实和周天还是一码事。

$$\text{朔策(朔望月)} = \frac{\text{通数}}{\text{日法}} = \frac{22207}{752} = 29 \frac{399}{752} = 29.530585 \text{ 日}$$

因仍沿用 19 岁 235 月章法,元嘉与景初类似,朔望月比较密近,回归年稍疏。略大于天。

法数中,元嘉历的设法、没余与景初历设法、没分也稍有不同。景初历中有下列关系:

$$\frac{\text{周天}}{\text{余数}} = \frac{673150}{9670} = \frac{67315}{967} = \frac{\text{没分}}{\text{没法}}$$

以设法除没分得没日的间距。根据没日的定义,一岁有 3190/608 个没日。一纪 608 年有 3190 没日。一纪 222070 日,以 3190 除纪日 222070,得:

$$\text{没日间隔} = \frac{222070}{3190} = 69 \frac{1960}{3190} = 69 \frac{196}{319} = \frac{22207}{319}$$

元嘉历称 319 为设法,196 为没余。纪日的 1/10 为 22207,是元嘉历的通数。故以设法 319 去通数,不尽为没余 196。

元嘉历如景初历,也给出各纪首迟疾、交会差率,数值如下:

甲子纪第一 迟疾差 17663 交会差 877

甲戌纪第二 迟疾差 3043 交会差 279

甲申纪第三 迟疾差 9144 交会差 620

甲午纪第四 迟疾差 15245 交会差 22

甲辰纪第五 迟疾差 625 交会差 363

甲寅纪第六 迟疾差 6726 交会差 704



仿效景初历,可以得出迟疾纪差 6101 和交会纪差 598。每纪迟疾差率递加纪差 6101,交会差率递减 598,得次纪。交会差率不足减时,加会月 939。会月为交限数与朔望合数之和,与景初历的会通相当。会月 939,有 160 交(食)、80 交周,得

$$\text{食年(交周)} = \frac{\text{会月}}{\text{朔望合数}} = 11.7375 \text{ 月} = 346.6152427 \text{ 日}$$

$$\text{一交} = \frac{\text{会月}}{\text{会数}} = 5.86875 \text{ 月} = 173.3076214 \text{ 日}$$

次纪迟疾差率由前纪差率递加纪差 6101 而得。递加后差率大于通周 20721 者,减通周。

元嘉历推步附有实例,对初学者很方便。

#### (1) 推入纪法

置上元庚辰(公元前 5261 年)尽所求年,以元法除之,不满元法,以纪法除之。余数不满纪法即入纪年;满法去之,得后纪。

如,元嘉二十年距庚辰上元 5703 年,以元法 3648 去之,余 2055。

$$\text{入元年} = [\text{积年}/\text{元法}]_R = [5703/3648]_R = 2055$$

$$\text{入纪年} = \frac{\text{入元年}}{\text{纪法}} = \frac{2055}{608} = 3 \frac{231}{608}$$

元嘉二十年入第四甲午纪 231 年。

#### (2) 推积月

$$\text{入纪年} \times \text{章月}/\text{章岁} = \text{积月} + \text{闰余}/19$$

闰余 12 以上,其年闰。

#### (3) 推天正朔:

$$\text{朔积分} = \text{通数} 22207 \times \text{积月}$$

$$\text{朔积分}/\text{日法} 752 = \text{积日} + \text{小余}/\text{日法} 752$$

$$\text{正月朔大余} = [\text{积日}/60]_R$$

以纪首日名计数大余,算外,得所求年正月朔日干支及小余。

累加朔策  $29\frac{399}{752}$  日得各月朔。小余 353 以上,其月大。加弦策

$7\frac{287\frac{3}{4}}{752}$  日得上弦。再加得望,又加得下弦。

(4)推二十四气

$$\text{入纪年} \times \frac{\text{余数 } 1595}{\text{度法 } 304} = \text{积没} + \frac{\text{小余}}{\text{度法}}$$

$$\text{所求年雨水大余} = [\text{积没}/60]_R$$

自纪首日名数起,算外,得所求年雨水干支、小余。递加  $15\frac{66\frac{11}{24}}{304}$

日,得各气大余、小余。

(5)推合朔月食术:

所求年正月朔去交分

$$= [(\text{积月} \times \text{会数 } 160 + \text{所入纪交会差}) / \text{会月 } 939]_R$$

次月朔去交分 = 正月朔去交分 + 会数 160

满会月 939 去之。元嘉二十年入甲午纪,交会差 22。

望日去交分 = 朔日去交分 + 朔望合数 80

朔望去交分小于合数 80,或大于交限数 859,朔则交会,望则交食。

(6)推入迟疾历法

$$\frac{[(\text{朔积分} + \text{所入纪迟疾差}) / \text{通周 } 20721]_R}{\text{日法 } 752}$$

= 所求年正月朔入历日 + 日余 / 日法

次月朔入历

$$= \text{正月朔入历日及余} + 1\frac{734}{752} \text{ 日}$$

元嘉二十年入甲午纪第四,所入纪迟疾差 15245。  $1\frac{734}{752}$  日为

朔望月与近点月之差。元嘉历近点月为：

$$\text{近点月} = \frac{\text{通周}}{\text{日法}} = 27 \frac{417}{752} \text{日} = 27.5545213 \text{日}$$

417 称作周日日余。周虚为日法与周日日余之差。

$$\text{月望入历} = \text{朔入历} + 14 + 575.5/752$$

(7) 推合朔月食定大小余(定朔定望)

$$\text{定积分} = \text{盈缩积分} \pm \text{入历日余} \times \text{损益率}$$

$$\text{定差法} = \text{差法} \pm \text{入历日余} \times \text{列差} / \text{日法}$$

定积分损减益加，定差法盈加缩减。

$$\text{朔望定小余} = \text{朔望平小余} \pm \frac{\text{定积分}}{\text{定差法}}$$

盈减缩加。列差、损益率、盈缩积分、差法皆由月离表查出。差法为月实行分与日平行分之差。

元嘉上元庚辰甲子纪首仅为朔旦雨水起于甲子夜半之元，既非日月交会、月过最卑，亦非五星合日之时。推步五星，另取近距、用做后元。法数列表 6-2 中，积年指后元距元嘉二十年。其中：

$$\text{日度法} = \text{度法} 304 \times \text{合数}$$

$$\text{室分} = \text{度分} 75 \times \text{合数}$$

$$\text{合岁} \times \text{回归年} = \text{合数} \times \text{会合周期(一终)}$$

水星、金星两合为一终。所以

$$\text{会合周期} = \text{合岁} \times \text{回归年} (365 \frac{75}{304}) / \text{合数}$$

由一终行星可得到五星相对恒星的平均运动  $n$ ，从而求出恒星周期  $T(=\text{周天}/\text{平均运动 } n)$ 。元嘉历五星会合、恒星周期数值也列于表 6-2。由表看出，元嘉历五星数值精度比前历有所提高。

(8) 推五星会年

$$\text{所求年距元} \times \frac{\text{合数}}{\text{合岁}} = \text{积合} + \frac{\text{合余}}{\text{合岁}}$$

表 6-2 元嘉历五星法数和会合、恒星周期

	合岁	合数	日度法	室分	后元 (公元)	积年	会合周期(日)		平均运动	恒星周期(日)	
							元嘉	今值		元嘉	今值
木星	344	315	95760	23625	丙戌 326	118	398.873	398.88	0.08430	4332.58	4332.59
火星	459	215	65360	16125	乙亥 435	9	779.759	779.94	0.53159	687.08	686.98
土星	383	370	112480	27750	甲戌 434	10	378.080	378.09	0.03394	10760.73	10759.2
金星	267	167	50768	12525	甲申 384	60	583.957	583.92			
水星	79	249	75696	18675	乙丑 425	19	115.881	115.88			

合余不满合数,合其年;以合数除合余,得 1,合往年;得 2,合前往年(只有火星可能如此)。

度分=合数-合余

(9)星合度、星合日

$$\text{周天 } 111035 \times \frac{\text{度分}}{\text{日度法}} = \text{积度} + \frac{\text{度余}}{\text{日度法}}$$

自室 2 度数起,算外(室 2 不计),星合所在度。

日余=雨水小余×合数+度余

星合日=积度+日余/日度法

自雨水起数,雨水不计,所得为星合日。

(10)星见日、星见度

星见日=星伏日数及余+星合日及余

星见度=星伏行度及余+星合度及余

星伏、星合之和满日度法进位。计数方法与前同。即皆以雨水所在日、度为起算点。

会合周内其他动态段内的行星位置和所当之日皆仿此。

景初晷漏沿袭四分。四分历黄道去极及晷影乃刘洪等于熹平三年(174)据仪、表所测定的结果。昼夜漏刻依黄道去极,昏旦中星按昼夜漏刻计算得出。元嘉历始对四分、景初晷漏数值做较大改动。据作者研究,元嘉晷漏为推算结果,未经实测,这个问题,留待下面与大明历步晷漏一起讨论。

年月不可公约,又皆不是日长的整数倍。中国古代不用十进制小数而用分数来表示年、月、日数的奇零部分。历算家怎样根据观测找出比较准确的分数的数学方法称作调日法。北宋周琮在明天历历论中指出,调日法是何承天创制的。他以 26/49 为强率,以 9/17 为弱率,累强弱之数,得中平之率,以求日法朔余。元嘉历日法 752,朔余 399,得 15 强 1 弱( $26 \times 15 + 1 \times 9 = 399$ ,  $15 \times 49 + 1 \times 17 = 752$ )。自后治历者多因循何承天之法累强弱之数得

出日数奇零的表达分数。调日法是历算数学方法上的重大发展。这个问题在后面章节中还会谈到。

元嘉历月行阴阳法乃元嘉二十年太祖使著作令史吴癸依刘洪阴阳历法所补。除日分不同外,基本全仿效乾象术。表中没有列出衰值一栏。表中给出半个恒星月( $13\frac{2685.5}{4064}$ 日)每日的损益率和兼数(月亮极黄纬)值。有关讨论已见乾象历,不赘述。

## 二、大明历

大明六年(462),南徐州从事史祖冲之上表献历。称何承天意存改革,但置法简略,今已乖远。据他考校,元嘉历至斯已有三方面的差谬,“日月所在,差觉三度;二至晷影,几失一日;五星见伏,至差四旬,留逆进退,或移两宿”。大明历改易旧法、创新二事。其一,破19岁7闰旧章法,改行391年144闰的新章法。其二,参以中星,课以蚀望,得今冬至之日在斗11度。通而计之,未盈百载,所差2度。旧法并会冬至日有定处,今令冬至所在,岁岁微差。在历法中首次引入岁差。大明历取岁差值为860分,当 $860/39491$ 度( $0.021777114$ 度,合45.9198年差1度)。并称大明历设法三点:①以子为辰首、位在正北,因以今历上元日度,发自虚1;②日辰之号,甲子为先,历法设元,应在此岁;今历上元,岁在甲子;③上元之岁,历中诸条,均应为始;而景初交会迟疾元首有差;元嘉日月五星各自有元,交会迟疾亦并置差;而大明历设法,日月五纬,交会迟疾,悉以上元岁首为始。

祖冲之指称元嘉三谬所言稍过,设法三事亦非必需。唯引进岁差和改革闰法为大明历的两大创法。祖冲之391年有144闰,每岁为12.368286445月。真值每岁约当12.3682765月。依章法19岁7闰为岁有12.36842105月,玄始历为12.3683333。可以看出,大明历闰法犹胜过赵歆玄始历。大明历岁差860分,冬

至点岁岁微差,当 42.9198 年西移 1 度。数值偏大。但将岁差引入历法,自此历法计算,天自为天,岁自为岁,是历法发展的一项重大创举。同时代的北朝各历都没有引进岁差。

大明历上元甲子至宋孝武帝大明七年(463)癸卯 51939 年,甲子岁不计。

元法 592365;纪法 39491;章岁 391;元 15 纪;纪 101 章;章月 4836;岁 4836/391 月;章闰 144;月法 116321;日法 3939。

$$\text{朔望月} = \frac{\text{月法}}{\text{日法}} = \frac{116321}{3939} = 29 \frac{2090}{3939} = 29.53059152 \text{ 日}$$

$$\begin{aligned}\text{回归年} &= \frac{\text{章月}}{\text{章岁}} \times \frac{\text{月法}}{\text{日法}} = 365 \frac{9589}{39491} \\ &= 360 \frac{207044}{39491} = 365.2428148186 \text{ 日}\end{aligned}$$

大明历称 9589 为岁余,207044 为余数。

大明历引入岁差。太阳在恒星间运动,一岁行天不足一周,与周天之差谓岁差。太阳日行 1 度,一岁行天  $365 \frac{9589}{39491}$  度。以纪法 39491 为度法,故一岁行天 14423804 分。称为岁周。大明历周天是 14424664 分。

故

$$\text{岁差分} = \text{周天} - \text{岁周} = 14424664 - 14423804 = 860$$

$$\text{周天度} = \frac{\text{周天}}{\text{纪法}} = \frac{14424664}{39491} = 365 \frac{10449}{39491} = 365.26459 \text{ 度}$$

称 10449 为虚分。

$$\text{岁差度} = \text{周天度} - \text{回归年}$$

$$= 860 / \text{纪法} = 860 / 39491 = 0.021777 \text{ 度}$$

$$\text{近点月} = \frac{\text{通周}}{\text{通法}} = \frac{726810}{26377} = 27 \frac{14631}{26377} = 27.5546878 \text{ 日}$$

$$\text{交点月} = \frac{\text{会周}}{\text{通法}} = \frac{717777}{26377} = 27 \frac{5598}{26377} = 27.21223 \text{ 日}$$

$$\text{没分} = \frac{\text{岁周}}{4} = 3605951$$

$$\text{没法} = \frac{\text{余数}}{4} = 51761$$

$$\text{纪法} = 23 \times 1717 = 101 \times \text{章岁}$$

$$\text{日法} = 101 \times 39$$

大明历称 23 为行分法, 1717 为小分法, 39 为差率, 它们全是为计算方便而设的中间辅助量。

大明历推步情况如下。

### (1) 推朔术

$$\text{距元年} \times \text{章月 } 4836 / \text{章岁 } 391 = \text{积月} + \frac{\text{闰余}}{\text{章岁}}$$

闰余 247 以上, 其年有闰。

$$\text{积月} \times \frac{\text{月法 } 116321}{\text{日法 } 3939} = \text{积日} + \frac{\text{小余}}{\text{日法}}$$

以 60 去积日, 不尽为大余。即

$$\text{天正朔大余} = [\text{积日} / 60]_R$$

大余命以甲子, 算外(甲子不计入), 所得即所求年天正十一月朔日干支。小余大于 1849, 其月大。

$$\text{次月朔大小余} = \text{天正朔大小余} + 29 \frac{2090}{3939}$$

小余满日法 3939, 进位; 大余满 60, 去之。累加朔望月

$$29 \frac{2090}{3939} \text{ 日, 得各月朔。}$$

$$\text{上弦日大小余} = \text{朔大小余} + 7 \frac{1507 \frac{1}{4}}{3939}$$

再加得望, 又加得下弦。

### (2) 推闰术



$$\text{闰所在月} = 12 \times \frac{\text{章岁 } 391 - \text{闰余}}{\text{章闰 } 144} = \frac{\text{章岁 } 391 - \text{闰余}}{12}$$

分母 12 称作闰法。闰余 247 以上, 此式得数小于等于 12。可知其年有闰。闰所在月自天正月数起, 天正月不计。

### (3) 推二十四气

$$\text{距元积年} \times \frac{\text{余数 } 207044}{\text{纪法 } 39491} = \text{积日} + \frac{\text{小余}}{\text{纪法}}$$

$$\text{天正十一月冬至大余} = [\text{积日}/60]_R$$

以 60 去积日, 不尽为大余。大余自甲子计数, 甲子不计, 得天正十一月冬至干支。

$$\text{次气} = \text{冬至大、小余} + \text{气策 } 15 \frac{8626}{39491} \frac{5}{6}$$

小余满纪法 39491 进位。累加气策 15.21845 日得各气。

### (4) 求土王、没灭

土王、没灭为步发敛术的内容, 将在历书历注论著中详细介绍。古历将一岁均分 5 份, 分别为木、火、金、水、土五行用事日。

春木、夏火、秋金、冬水四行各以四立之节开始, 用事  $73 \frac{1917.8}{39491}$  日

(73.048563 日)。土居四时之季。每时最后的 18.26214 日

( $18 \frac{10352.2}{39491}$  日), 即回归年的二十分之一, 为土用事日。就是说,

四立前 18.26214 日, 为土用事日之始。冬至距立春  $45 \frac{25880.5}{39491}$

日, 距季冬土用事日  $27 \frac{15528}{39491}$  日。四立分别相距  $91 \frac{12270}{39491}$  日。

故有

$$\text{季冬土用事日} = \text{冬至大小余} + 27 \frac{15528}{39491}$$

$$\text{季春土用事日} = \text{季冬土用事日} + 91 \frac{12270}{39491}$$

累加六气策(91.3107037 日)得各季土用事日。

没日、灭日已在四分历中做过介绍。一岁有没日  $5 \frac{9589}{39491}$  个,

没日相距  $365 \frac{9589}{39491} / 5 \frac{9589}{39491} = 69 \frac{34442}{51761}$  日称没策。

天正后没日距冬至 =  $\frac{\text{没分} - 90 \times \text{冬至小余}}{\text{没法}} = \text{距日} + \frac{\text{日余}}{\text{没法}}$

次没 = 天正后没日及余 + 没策  $69 \frac{34442}{51761}$

累加没策得各没。

(5)推日所在度

度实 = [纪法 × 朔积日 / 周天]<sub>R</sub>

度实 / 纪法 = 积度 + 度余 / 纪法

积度自虚 1 计数,虚 1 不计,满宿次去之,至不满宿,为天正十一月合朔夜半日所在度。

次朔夜半日度 = 天正朔夜半日度 + 是月日数

大月加 30 度,小月加 29 度。入虚宿去度分(奇零,即虚分/纪法)。

$$\begin{aligned}\text{虚分 } 10449 / \text{纪法 } 39491 &= 10449 / (1717 \times 23) \\ &= 10449 / 1717 / 23 \\ &= 6 \frac{147}{1717} / 23\end{aligned}$$

入虚宿去奇零,即去行分 6,小分 147。

求次日夜半日度 = 朔夜半日度 + 1 度

(6)推朔日夜半月所在度

前面推出了朔日夜半日所在度,此处要计算朔日夜半月所在度。合朔时日月同度。现在的问题是,求出夜半时月距太阳的度数。若合朔时刻在子夜夜半,即合朔小余为零时,夜半月度等于夜半日度。这是特例。绝大多数情况下朔小余不为零。小余为

日的奇零部分,一般用分数(小余/日法)来表示。设月亮平均运动为  $n'$ , 即日行  $n'$  度; 太阳日行 1 度, 令为  $n$ , 即  $n$  等于 1 度。合朔时太阳已较夜半日度东行了  $n \times \text{小余/日法}$  度, 月比夜半月度已东移  $n' \times \text{小余/日法}$  度。合朔时日月同经, 故有:

$$\text{夜半日度} + \frac{n \times \text{小余}}{\text{日法}} = \text{夜半月度} + \frac{n' \times \text{小余}}{\text{日法}}$$

所以

$$\text{夜半月度} = \text{夜半日度} - (n' - n) \times \frac{\text{小余}}{\text{日法}}$$

式中, 夜半日度已知,  $n$  为太阳平均运动, 等于 1, 只需知道月亮的平均运动  $n'$ , 即可求得夜半月度。大明历由于引进了岁差, 所以月亮的平均运动计算方法与前面所述其他几种历法稍有不同。为便于理解, 我们还是从月亮的会合运动方程入手讨论这个问题。将会合运动方程  $1/S = 1/M + 1/T$  两端各乘  $T$ , 则有:

$$T/S = T/M + 1$$

其中  $S$  为恒星月,  $M$  是朔望月,  $T$  系恒星年。太阳日行 1 度, 行天一周所行的度数就是周天度。故  $T$  用日表示为恒星年, 用度表示即周天度。在大明历中纪法亦为度法, 故  $T = \text{周天/纪法}$ 。前面已述, 以月平均运动  $n'$  除周天, 得恒星月  $S$ 。所以, 月亮的平均运动  $n'$  为:

$$n' = \frac{T}{S} = \frac{\text{周天度}}{\text{朔望月}} \frac{T}{M} + 1 = \frac{\text{周天/纪法}}{\text{月法/日法}} + 1$$

周天等于岁周加岁差分, 即:

$$\text{周天 } 14424664 = \text{岁周 } 14423804 + \text{岁差分 } 860$$

故

$$n' = \frac{\frac{\text{岁周}}{\text{纪法}}}{\frac{\text{月法}}{\text{日法}}} + \frac{\frac{\text{岁差分}}{\text{纪法}}}{\frac{\text{月法}}{\text{日法}}} + 1 = \frac{\text{回归年}}{\text{朔望月}} + \frac{\text{岁差} \times \text{日法}}{\text{纪法} \times \text{月法}} + 1$$

因为

$$\text{章月/章岁} = \text{回归年/朔望月}$$

如此,代入上式可避免大数字运算,而

$$\begin{aligned}\frac{\text{岁差} \times \text{日法}}{\text{纪法} \times \text{月法}} &= \frac{860 \times 3939}{39491 \times 116321} \\ &= \frac{860 \times 3939 / 116321}{39491} \\ &= \frac{29 \frac{14231}{116321}}{39491}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\text{月亮平均运动 } n' &= \frac{\text{章月}}{\text{章岁}} + \frac{\text{岁差} \times \text{日法}}{\text{纪法} \times \text{月法}} + 1 \\ &= \frac{4836}{391} + \frac{\frac{860 \times 3939}{116321}}{39491} + 1 \\ &= 12 \frac{144}{391} + \frac{\frac{860 \times 3939}{116321}}{39491} + 1\end{aligned}$$

代入夜半月度 = 夜半日度 -  $(n' - n) \times \text{朔小余} / \text{日法}$  中,因太阳平均运动  $n = 1$ ,即太阳日行 1 度。故

$$\begin{aligned}n' - n = n' - 1 &= 12 \frac{14544}{39491} + \frac{\frac{860 \times 3939}{116321}}{39491} \\ (n' - n) \times \frac{\text{朔小余}}{\text{日法}} &= \left( \frac{488436}{3939} \text{朔小余} + \frac{\text{朔小余}}{3939} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{860 \times 3939}{116321} \right) / 39491 \\ &= [124 \times \text{朔小余} + \frac{860 \times \text{朔小余}}{116321}] / 39491\end{aligned}$$

因此

$$\text{合朔夜半月所在度} = \text{合朔夜半日所在度}$$

$$-\left[124 \times \text{朔小余} + \frac{860 \times \text{朔小余}}{116321}\right] / \text{纪法 } 39491$$

所以,推月所在度术文说:

以朔小余乘 124 为度余。又以朔小余乘 860 为微分。微分满月法(116321)从度余,度余满纪法(39491)为度,以减朔夜半日所在,则月所在度。求次月,大月加度 35,度余 31834,微分 77967;小月加度 22,度余 17261,微分 63736。入虚去度分也。

大月 30 日,小月 29 日。要求次月月朔夜半月所在度,大月需加  $30 \times n'$  度,小月则加  $29 \times n'$  度。29、30 日皆大于恒星月,故次朔夜半月度加后需减去周天度。

大月 30 天情况下:

$$\begin{aligned} & 30 \times n' - \text{周天度} \\ &= 30 \times 13 \frac{14573 \frac{14231}{116321}}{39491} - 365 \frac{10449}{39491} \\ &= 390 + 30 \times \frac{14573}{39491} + \frac{30 \times 14231}{116321} - 365 \frac{10449}{39491} \\ &= 35 \frac{31834 \frac{77967}{116321}}{39491} \end{aligned}$$

次月朔夜半月度

$$= \text{本月朔夜半月度} + 35 \frac{31834 \frac{77967}{116321}}{39491}$$

小月 29 日情况下:

$$\begin{aligned} & 29 \times n' - \text{周天度} \\ &= 29 \times 13 \frac{14573 \frac{14231}{116321}}{39491} - 365 \frac{10449}{39491} \end{aligned}$$

$$= 377 + 10 \frac{27707}{39491} + \frac{3 \frac{63736}{116321}}{39491} - 365 \frac{10449}{39491}$$

$$= 22 \frac{17261 \frac{63736}{116321}}{39491}$$

$$\text{次朔夜半月度} = \text{本月朔夜半月度} + 22 \frac{17261 \frac{63736}{116321}}{39491}$$

## (7) 推入迟疾历

通实 = 朔积日 × 通法

$[\text{朔积日} \times \text{通法} 26377 / \text{通周} 726810]_R = \text{余数}$

$\frac{\text{余数}}{\text{通法} 26377} = \text{入历日} + \text{日余} / \text{通法}$

即得天正十一月朔夜半入历日及余。

本月为大月(30日), 次月朔夜半入历日、余 = 本月朔夜半入历日、余 + 30 - 近点月  $\left(27 \frac{14631}{26377}\right)$  = 本月朔夜半入历日、余 +

$$2 \frac{11746}{26377}。$$

小月情况下(29日), 次月朔夜半入历日、余 = 本月朔夜半入历日、余 + 29 - 近点月  $\left(27 \frac{14631}{26377}\right)$  = 本月朔夜半入历日、余 +

$$1 \frac{11746}{26377}。$$

次日夜半入历 = 月朔夜半入历日、余 + 1。

## (8) 求日所在定度

大明历月离表与其他历法稍有不同。表供计算月行迟疾使用。共分五栏。

近点月内的日数。从近地点开始, 每日一值。“一日”为 0.0 到 1.0 日, “二日”乃 1.0 至 2.0 日。共 28 日。

月行度。为月亮每日的实行度分。以行分法 23 为度法，即 1 度为 23 行分。

$$\text{损益率} = (\text{月实行分} - \text{月平行分}) \times \frac{\text{日法}}{\text{通法}}$$

$$\text{前面我们已经推出大明历月平行运动 } n' = 13 \frac{14573}{39491} \frac{14231}{116321}$$

(13.369024)度。以章岁 391 为度母，则月平行分为 5227.288341 分。将月实行度也以章岁为度法化为月实行分。实行与平行之差，乘日法，以通法除之，得损益率。

盈缩积分，为其前各日损益率与通法乘积的累加累减值。即

$$\text{盈缩积分} = \sum \text{损益率} \times \text{通法}$$

$$= \sum (\text{月实行分} - \text{月平行分}) \times \text{日法}$$

差法，乃月实行分与日平行分之差值。太阳日行 1 度为 391 分，故

$$\text{差法} = \text{月实行分} - \text{章岁 } 391$$

月实行分、平行分是以章岁 391 为度法的。盈缩积分要化为度，由前式看出，须以日法章岁乘积除之。盈缩积分为损益率与通法相乘的累计积，化为度，也需以日法章岁乘积除之。计算日所在定度，就是将平朔日所在度加上月行迟疾改正。

$$\begin{aligned} \text{月行迟疾改正} &= \left( \text{盈缩积分} \pm \frac{\text{日余}}{\text{通法}} \times \text{损益率} \right. \\ &\quad \left. \times \text{通法} \right) / (\text{日法} \times \text{章岁}) \\ &= \frac{\text{盈缩积分} \pm \text{日余} \times \text{损益率}}{\text{日法} \times \text{章岁}} \end{aligned}$$

由于纪法 = 101 × 章岁，日法 = 101 × 39 (差率)，代入得：

$$\text{月行迟疾改正} = \frac{\text{盈缩积分} \pm \text{日余} \times \text{损益率}}{\text{差率}} / \text{纪法 } 39491$$

$$= \text{改正度} + \frac{\text{度余}}{\text{纪法}}$$

$$\text{日所在定度} = \text{日所在平度} \pm \left( \text{改正度} + \frac{\text{度余}}{\text{纪法}} \right)$$

盈加缩减。这就是求日所在定度术文中所说的：

以夜半入历日余乘损益率，以损益盈缩积分，如差率(39)而一，所得满纪法(39491)为度，不尽为度余，以盈加缩减平行度及余为定度。

#### (9)推月入阴阳历

乾象、元嘉诸历推月入阴阳历皆以恒星月入算。大明历始改用交点月。月入黄道南北，是否入食限，都与黄白交点、月亮去交远近有关，是由交点月决定的。

通实(朔积日×通法)以会周去之，不满交数 358888.5 时，为朔入阳历(黄道南)。大于交数，则月入阴历(黄道北)。

$$\text{朔入阳历分} = [\text{通实} / \text{会周} 717777]_R$$

$$\text{朔入阴历分} = \left[ \frac{\text{通实}}{\text{会周}} \right]_R - \text{交数 } 358888.5$$

会周为交点月日分，为月亮连续两次经过降交点的时间间隔。一会有两交。为月自降交点至升交点，或自升交点至降交点所经历の日分。

$$\frac{\text{朔入阴阳历分}}{\text{通法}} = \text{天正朔夜半入历日} + \frac{\text{日余}}{\text{通法}}$$

$$\text{大月(30日)情况下, 次月朔夜半入历日、余} = \text{本月朔夜半入历} + 30 - \text{交点月 } 27 \frac{5598}{26377} = \text{本月朔夜半入历} + 2 \frac{20779}{26377}.$$

$$\text{小月(29日)情况下, 次月朔夜半入历日、余} = \text{本月朔夜半入历} + 29 - \text{交点月 } 27 \frac{5598}{26377} = \text{本月朔夜半入历} + 1 \frac{20779}{26377}.$$



一会有两交。一交等于半个交点月( $13 \frac{15987.5}{26377}$ 日)。入阴阳

历日大于一交,说明月亮已过交点,则减去一交(交数/通法= $13 \frac{15987.5}{26377}$ 日)。原为阳历易为阴历,本为阴历则成阳历。

次日夜半入历日、余=本日夜半入历+1

#### (10)求朔望差

前面介绍了朔日及平日夜半入阴阳历日的计算方法。朔望发生在夜半的机会是难得的。大多数朔望都有加时,即有朔、望小余。计算得出的朔望小余都是以日法为分母的。而入阴阳历日计算是以通法为分母的。为了计算朔望加时所入阴阳历日,必须化为以通法为分母。朔差数、望差数就是以通法为分母表示的朔望小余。处理方法就是分数计算中的通分。

$$\begin{aligned}
 \text{朔差数} &= \frac{\text{朔小余}}{\text{日法 } 3939} \times \frac{\text{通法 } 26377}{\text{通法 } 26377} \\
 &= \frac{\text{朔小余} \times 2029 \times 13}{303 \times 13} / \text{通法} \\
 &= \text{朔小余} \times \left(6 + \frac{211}{303}\right) / \text{通法} \\
 &= \text{朔小余} \times \left(6 + \frac{422}{606}\right) / \text{通法} \\
 &= \left(6 \times \text{朔小余} + \frac{422 \times \text{朔小余}}{606}\right) / \text{通法} \\
 &= \left(\text{日余} + \frac{\text{小分}}{606}\right) / \text{通法} \\
 \frac{1}{2} \text{朔望月} &= 14 \frac{3014.5}{3939} \text{日} \\
 &= 14 + \frac{3014.5}{3939} \text{日}
 \end{aligned}$$

$$\frac{3014.5}{3939} \times \frac{\text{通法 } 26377}{26377}$$

$$= 20186 \frac{125}{606} / 26377$$

$$\begin{aligned} \text{望差数} &= \text{朔差数} + \frac{1}{2} \text{朔望月} \\ &= \frac{\text{朔小余} \times 2029 \times 2}{606} / 26377 \\ &\quad + 14 + 20186 \frac{125}{606} / 26377 \\ &= 14 + \left( 6 \times \text{朔小余} + 20186 \right. \\ &\quad \left. + \frac{422 \times \text{朔小余} + 125}{606} \right) / 26377 \end{aligned}$$

(11) 求合朔、月食

$$\begin{aligned} \text{合朔加时入历} &= \text{合朔夜半入历} + \text{朔差数} \\ &= \text{合朔夜半入历} + \left( 6 \times \text{朔小余} + \right. \\ &\quad \left. \frac{422 \times \text{朔小余}}{606} \right) / 26377 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{望加时入历} &= \text{合朔夜半入历} + 14 + \left( 6 \times \text{朔小余} \right. \\ &\quad \left. + 20186 + \frac{422 \times \text{朔小余} + 125}{606} \right) / 26377 \end{aligned}$$

当计算朔入阴历分时要交数 358888.5, 故朔望夜半入阴历日及余, 有时会出现半分的情况。此时可以小分 303 代之, 即  $\frac{303}{606}$ 。小分加满 606 进位成日余, 日余满通法 26377, 进位为日。日满交点月去之。

朔望加时入阴历历数值小于食限内限, 或大于食限外限, 朔则交会, 望则交食。

$$\text{内限} = \frac{1}{2}(\text{朔望月} - \text{交点月}) = 1 \frac{4198 \frac{428}{606}}{26377} \text{日}$$

$$\text{外限} = \frac{1}{2} \text{交点月} - \text{内限} = 12 \frac{11788 \frac{481}{606}}{26377} \text{日}$$

### (12) 求合朔月食定大小余

朔、望差数已将朔望小余换成以通法为分母。这样不仅可得朔望加时入阴阳历日,也可计算朔望加时入迟疾历日。

朔、望加时入迟疾历 = 合朔夜半入迟疾历日 + 朔、望差数

根据朔望加时入迟疾历日、余查月离表,得到与该历日对应的盈缩积分和损益率数值。

$$\text{朔、望定小余} = \text{朔、望平小余} + \frac{\text{盈缩积分} \pm \text{入历余} \times \text{损益率}}{\text{差法}}$$

盈减缩加。以日法 3939 除小余得日的小数。小余满日法为日。

### (13) 求月去日道度

由月入阴阳历日查阴阳历表,则:

$$\text{月去日道度} = \frac{1}{12} \left( \text{兼数} \pm \frac{\text{入阴阳历余} \times \text{损益率}}{\text{通法 } 26377} \right)$$

阳历月在表(黄道南),阴历月在里(黄道北)。

### (14) 五星会合、恒星周期

前面曾介绍五星会合、恒星周期满足

$$\text{恒星周期} = \frac{\text{周天}}{n}$$

$$\text{会合周期} = \frac{\text{周天}}{|n' - n|}$$

其中  $n'$  是行星的平均运动,  $n$  为视太阳的平均运动。知道  $n'$ , 则可得出行星的恒星周期。因视太阳的平均运动  $n$  已知, 故由行星的会合周期可求出行星对于恒星的平均运动  $n'$ , 从而得出恒

星周期。大明历推五星术,给出五星的会合周期和一终行天度数。由它们可计算行星的平均运动  $n'$ 。以  $n'$  除周天 365 度 10449 分得恒星周期。大明历列出的木、火、土、金、水五率为五星一终(会合周期)的纪法分,即以纪法 39491 除五率,得五星以日表示的会合周期值。大明历五星会合、恒星周期数值列于表 6-3 中。

表 6-3 大明历五星会合、恒星周期值

	五率	会合周期(日)		行天度	$n'$	恒星周期(日)	
		大明历	真值			大明历	真值
木星	15753082	398.903	398.88	33.6385	0.08433	4331.500	4332.59
火星	30804196	780.031	779.94	414.7662	0.53173	686.9355	686.980
土星	14930354	378.070	378.09	12.8052	0.03387	10784.334	10759.2
金星	23060014	583.931	583.92				
水星	4576204	115.880	115.88				

会合周期比较准确,但木星、土星不及元嘉;恒星周期除火星外,稍逊于元嘉历。

#### (15) 求星合日、星合度

度实 = 朔积日  $\times$  纪法

$$\frac{\text{星率} - [\text{度实} / \text{星率}]_R}{\text{纪法 } 39491} = \text{星合入岁日} + \frac{\text{日余}}{\text{纪法}}$$

星合入岁日自所求年天正十一月朔日计数,朔日不计,得星合日。

星合所在度 = 天正朔积度余 + 入岁日、余

星合之时,日星同度。因太阳日行 1 度,故天正朔积度及余与星合入岁日及余相加得星合所在度。和满周天度 365 度 10449 分,去之。自虚宿 1 度数起,算外(虚 1 不计),即得星合度。

#### (16) 星见日、星见度

星见日 = 星合日、余 + 伏日、余

星见度 = 星合度及余 + 星伏度及余

星伏日及余、星伏度及余皆由五星动态表查出。日余、度余皆满纪法 39491 进位。

### (17) 行五星法

大明历步五星以纪法作度法。为用分数计算方便，又将纪法分成小分法与行分法。纪法 39491 = 小分法 1717 × 行分法 23。将度的奇零(称度余)用行分法和小分法表示。

$$\frac{\text{度余}}{\text{纪法}} = \frac{\text{度余}}{1717 \times 23} = \text{度余} / (1717 \times 23) = \frac{\text{整数} \frac{\text{小分}}{1717}}{23}$$

小分满 1717 进位为行分，行分满 23 成度。例如，周天度 365 度 10449 分。10449 为周天的度余。以小分法 1717 除度余，所得为行分，不尽为小分。故周天的奇零可用下列行分、小分表示。

$$\text{周天奇零} \frac{10449}{39491} = \frac{10449}{1717 \times 23} = \frac{10449}{1717} / 23 = \frac{6 \frac{147}{1717}}{23}$$

$$\text{周天度} = 365 \frac{10449}{39491} \text{度} = 365 \frac{6 \frac{147}{1717}}{23} \text{度}$$

其中 6 为行分，147 为小分。

大明历五星行度表中，伏行度数以纪法为分母，其他顺、逆、疾、迟各段，行度皆以行分 23 为分母。所以要推算某日某时五星的位置，需先将星合度余、伏行度余以小分法除，化为行分、小分表示的形式，再与其他各段相加减，这样都化为以行分 23 为分母，通分后加减，即得所求。五星各段的行日，每日的行分，动态表中讲得很清楚。顺行为加，逆行减之，很易入算。读者也可参看本书四分历步五星的介绍。

后汉四分历晷漏表为刘洪等人于灵帝熹平三年所完成。上

一章我们对它做了较严格的分析和考查。何承天认为四分历晷漏春分昼长,秋分日短,所差超过半刻。而二至日夜为长短至,二分昼夜应等长。故分析得出四分历春分近夏至,秋分近冬至。所测分至日有误差,故日有短长。他并考校景初二至差3日有余。历之二至,非天之二至。这些分析是有一定道理的。四分历冬至后昼漏长于冬至前,元嘉历晷漏表昼夜漏刻、日中晷影,二至前后并皆对称相等。祖冲之也说,四分历立冬中影长10尺,立春中影长9.6尺。冬至日南至,日晷最长,二气(立冬、立春)去冬至,日数既同,则中影应该相等才对。可是四分历前(立冬)长,后(立春)短,相差至4寸之多,可证四分历冬至是后天的。立冬、立春时晷影,每天约差0.95寸弱,依此推之,二气应各退2.12日。如此,则晷影之数,立冬要短、立春要长,各差2寸,中影应长9.8尺。即晷影长9.8尺之日为正确的立冬、立春之日。所以大明历晷漏表冬夏至前后各气的日中影长和昼夜漏刻也是一一对称而相等的。

元嘉历晷漏表始自雨水、终于立春,表中给出二十四气每气始日的日中晷影、昼漏刻、夜漏刻、昏中星、明中星及日所在度等6项数据。大明历晷漏表以冬至开始,大雪结束,列出各气交气日日中影、昼漏刻、夜漏刻、昏中星度、明中星度等5项数值。表中没有给出日所在度。它可由冬至日度累加气策一一得出。元嘉历昏、明中星是昏、明时刻南中星的宿度;大明历给出的是昏、明时刻太阳距午的度数,即太阳的时角 $t$ ,自南天子午线向西计量。

昏、明中星 = 夜半日所在度 + 昏、明中星度

我们依照元嘉历、大明历制定的年代,元嘉二十年(443)和大明七年(463)的天象考查了两历的晷漏表的日中影长和昼夜漏刻数值。方法与考查四分历晷漏术类似。结果有些出人意料,两历晷漏表的各项数据可能皆非何承天、祖冲之的实测所得,而是根

据理论分析而来。

自吴大帝孙权黄龙元年(229)迁都南京(时称建邺),至孙皓天纪四年(280)降,吴亡,南京为吴都 52 年。晋愍帝司马邺建兴元年(313),因避讳,改建邺为建康。建兴四年(316)愍帝降汉。次年(317)三月琅邪王司马睿在建康即晋王位,自此史称东晋。过年(318)三月,晋王称帝,改元建武二年。自此以后,历南朝宋、齐、梁、陈,直到陈后主叔宝祯明三年(589),亡于隋,皆以建康为都。南京为六朝古都 324 年。我们以南京的纬度计算元嘉二十年、大明七年的日中晷影和昼夜漏刻与两历晷漏数值皆不相符,并有较大差异。而与洛阳、阳城纬度的计算结果,虽仍有出入,但比较接近。因为①两历冬至日所在仍有一定误差,元嘉差 $0^{\circ}.41$ ,大明约大 $0^{\circ}.19$ ;②日行有盈缩,相同的时间并不走过同样的角度。两历皆用平气。二至前后相应各气日行距离不等,对应的赤纬(去极度)各异。所以冬至、夏至前后各气日中影长、昼夜漏刻并不对称相等。再加上大气折射,即使春秋二分,实测的昼夜长短也并不同。考查显示,元嘉历、大明历晷漏表并非南京、阳城实测。

祖冲之在答辩戴法兴所难中,曾列举了大明历实测的三个晷影长度结果:大明五年十月十日(461 年 11 月 27 日)影长 10.775 尺;十一月二十五日(462 年 1 月 11 日)影长 10.8175 尺;十一月二十六日(462 年 1 月 12 日)影长 10.7508 尺。

我们用现代天文方法计算,这三个晷影确为祖冲之是时在南京的实测,考查结果见表 6-4。史载的这三个晷影长度与南京计算结果相差不足 1 寸,相对误差不到 1%,而洛阳计算结果误差约当 1.2 尺,相对误差超过 10%。可证确为斯时建康实测。十月十日为大明五年小雪后八日,十七日大雪,为大雪前第七日;十一月十一、十二日分别为小寒后第八、第九日,十二月三日大寒,当大

寒前的第八第七天。而在大明历晷漏表中,小雪、大雪的日中影分别为 11.2 尺,12.43 尺;小寒、大寒分别为 12.43 尺和 11.2 尺,数值悉比实测结果大很多。这更证明了大明历晷漏表日中影并非祖冲之南京实测。

细审大明历日中影数值,考虑前引祖冲之对四分历中影长度的分析,及做出立冬立春影长俱应为 9.8 尺的理由,可知其日中影数值完全是据四分历冬夏二至前后各对应节气“晷影”相加折半得到的。这一点由表 6-5 可以看得很清楚。

元嘉历日中晷影数值,考查证实并非建康实测,由表 6-5 看出亦非四分历相应二气晷影相加折中,而与阳城、洛阳纬度实测结果相近。

四分历昼夜漏刻,术文明确记载是根据去极远近计算得出。我们的考查显示元嘉、大明两历亦非南京实测所得,由表 6-5,与四分历漏刻比较看出,与日中影类似,大明、元嘉昼夜漏刻,亦为四分历对应两节漏刻的平均值。

元嘉历、大明历晷漏表分别给出了昏明中星及昏明中星度。它们皆由计算得出。昏明中星度是昏明时刻太阳距午度,各加夜半日所在,就得昏明中星。关于昏明中星及昏明太阳距午度的计算,在后汉四分历已做详尽说明。在后代历法中还会遇到太阳时角(即太阳距午度)及昏旦中星的计算,这里就不再重复多讲了。

#### 第四节 北朝历法概况

北魏始自公元 386 年拓跋珪称代王,改元登国,都盛乐(今内蒙古呼和浩特西南)。晋安帝隆安二年(398),拓跋珪迁山东六州民夷十万余口赴代。六月定国号为魏,七月迁都平城(今山西大同)。十二月即帝位,是为道武帝,改元天兴。初,道武帝令太史



表 6-4 祖冲之所测三个暑影尺寸

日期	正午日度(°)		南京						洛阳		阳城
	黄经	赤纬	$\varphi-\delta$ (°)	暑影 (尺)	史载	差	相对误差 (%)	$\varphi-\delta$ (°)	暑影 (尺)		暑影
461.11.27	246.91	-21.67	53.67	10.878	10.775	0.103	0.96	56.27	11.982		11.852
462.1.11	292.75	-21.73	53.73	10.902	10.818	0.084	0.78	56.33	12.008		11.894
462.1.12	293.76	-21.55	53.55	10.833	10.751	0.082	0.76	56.15	11.930		11.794

表 6-5 大明历、元嘉历暑影、漏刻数值及与四分历的比较

	暑影(尺)		四分历暑影值(尺)		昼漏(刻)		四分历昼漏值(刻)	
	大明	元嘉		平均	大明	元嘉		平均
冬至	13.00	13.00	冬至 13.00	13.00	45.0	45.0	冬至 45.0	45.00
小寒	12.43	12.48	小寒 12.30	12.43	45.6	45.6	小雪 45.8	45.65
大寒	11.20	11.34	大寒 11.00	11.20	46.7	46.7	大寒 46.8	46.75
立春	9.80	9.91	立春 9.60	9.80	48.4	48.4	立春 48.6	48.40
雨水	8.17	8.22	雨水 7.95	8.175	50.5	50.5	雨水 50.8	50.55
惊蛰	6.67	6.72	惊蛰 6.50	6.675	52.9	52.9	惊蛰 53.3	52.95
春分	5.37	5.39	春分 5.25	5.375	55.5	55.5	春分 55.8	55.50
清明	4.25	4.25	清明 4.15	4.25	58.1	58.0	清明 58.3	58.05
谷雨	3.26	3.25	谷雨 3.20	3.265	60.4	60.3	谷雨 60.5	60.35
立夏	2.53	2.50	立夏 2.52	2.535	62.4	62.3	立夏 62.4	62.35
小满	1.99	1.97	小满 1.98	1.99	63.9	63.9	小满 68.9	63.85
芒种	1.69	1.69	芒种 1.68	1.69	64.8	64.8	芒种 64.9	64.80
夏至	1.50	1.50	夏至 1.50	1.50	65.0	65.0	夏至 65.0	65.00

令晁崇修浑仪以观星象，仍用景初历。岁年积久，颇以为疏。太武帝拓跋焘太延五年（439），魏军克姑臧，沮渠牧犍降，北凉亡。得赵叟所修玄始历。后谓为密。文成帝拓跋濬兴安元年（452）行用之。延昌四年（515）冬，张洪、张龙祥、李业兴等三家并上新历，各求申用。太傅、清河王怿等以天道至远，非卒可量，请立竿候影，期之三载，乃采其长者，更议所从。蒙敕特许。神龟初（518），崔光又上表，奏请广访诸儒，更取通数兼通经义者及太史，并集秘书与史官同验疏密。并请宰辅群官临检得失，至于岁终，密者施行。奉诏听可。这样，过去三年，再历寒暑，积勤构思，大功获成。于是将张洪等所上三历，以及卢道虔、卫洪显、胡荣、道融、樊仲遵、张僧豫所上，总合九家共成一历，请定名神龟历施用。肃宗孝明帝以历就，大赦改元，因名正光历，颁于天下。其历九家共修，以张龙祥（张明豫之子）、李业兴为主。

北魏孝武帝永熙三年（534），高欢反，攻洛阳。孝武奔关中依宇文泰。欢入洛阳，立清河王亶之子元善见为帝，改元天平，是为东魏孝静帝。魏自此分为东、西。东魏迁都于邺（临漳）。闰十二月宇文泰毒杀孝武帝，立南阳王元宝炬，是为西魏文帝。东、西魏仍用正光历，直到西魏恭帝三年（556）禅位于周。北周初仍沿用之，至明帝武成元年（559）。

东魏孝静世，正光壬子历气朔稍违，荧惑失次，四星出伏，历亦乖舛。兴和元年（539）十月，齐献武王入邺，复命李业兴，令其改正。成甲子元历。于翌年兴和二年（540）颁行，又称兴和历。行用至武定八年（550）。五月，高洋废孝静帝，自立，东魏亡。北齐文宣帝受禅，命散骑侍郎宋景业协图讖，造天保历。次年天保二年（551）行之。兴和历共用11年。

正光历乃总合九家，共成一历。兴和历似主要为李业兴所修撰。两历数有微异，法则一理。历术推步皆分为七章，章目大同小异。

正光历、兴和历月离表的组成和形式也是完全一样的。由月行迟疾度及分、损益率、盈缩并率、盈缩积分等四栏组成。

两历基本法数见表 6—6。

表 6—6 正光历、兴和历基本法数表

	正光历	兴和历
回归年	$\frac{\text{周天分}}{\text{蔀法}} = \frac{2213377}{6060}$ $= 365 \frac{1477}{6060}$ $= 365.24372937 \text{ 日}$	$\frac{\text{周天}}{\text{蔀法}} = \frac{6158017}{16860}$ $= 365 \frac{4117}{16860}$ $= 360 \frac{88417}{16860}$ $= 365.2441874 \text{ 日}$
朔望月	$\frac{\text{周天分}}{\text{日法}} = \frac{2213377}{74952}$ $= 29 \frac{39769}{74952}$ $= 29.53059291 \text{ 日}$	$\frac{\text{周天}}{\text{日法}} = \frac{6158017}{208530}$ $= 29 \frac{110647}{208530}$ $= 29.53060471 \text{ 日}$
近点月	$\frac{\text{通周}}{\text{日法}} = \frac{2065266}{74952}$ $= 27 \frac{41562}{74952}$ $= 27.55451489 \text{ 日}$	$\frac{\text{通周}}{\text{日法}} = \frac{5745941}{208530}$ $= 27 \frac{115631}{208530}$ $= 27.55450535 \text{ 日}$
半食年	$\frac{\text{会通}}{\text{日法}} = \frac{12989904}{74952}$ $= 173 \frac{23208}{74952}$ $= 173.3096382 \text{ 日}$	$\frac{\text{会通}}{\text{日法}} = \frac{36142807}{208530}$ $= 173 \frac{67117}{208530}$ $= 173.3218578 \text{ 日}$

续表

	正光历	兴和历
恒星月	$\frac{\text{周天分}}{\text{月周}} = \frac{2213377}{81012}$ $= 27 \frac{26053}{81012}$ $= 27.32159433 \text{ 日}$	$\frac{\text{周天}}{\text{月周}} = \frac{6158017}{225390}$ $= 27 \frac{72487}{225390}$ $= 27.32160699 \text{ 日}$
朔望合数	$\frac{1}{2} \text{ 经月} = \frac{\text{周天分}}{2 \times \text{日法}}$ $= \frac{2213377}{2 \times 74952}$ $= 14 \frac{57360.5}{74952}$	$\frac{1}{2} \text{ 经月} = \frac{\text{周天}}{2 \times \text{日法}}$ $= \frac{6158017}{2 \times 208530}$ $= 14 \frac{159588.5}{208530}$
入交限数	$\frac{1}{2} (\text{食年} - \text{经月})$ $= 173 \frac{23208}{74952} - 14 \frac{57360.5}{74952}$ $= 158 \frac{40799.5}{74952}$	$\frac{1}{2} (\text{食年} - \text{经月})$ $= 173 \frac{67117}{208530} - 14 \frac{159588.5}{208530}$ $= 158 \frac{116058.5}{208530}$

637

月行迟疾度及分是近点月内每日月的实行度及分。以章岁为度分值。

正光、兴和两历计算中皆未引入岁差。前面说过，由月亮会合运动方程，可改写成

$$\frac{\text{周天度}}{\text{恒星月}} = \frac{\text{回归年}}{\text{朔望月}} + 1$$

其中

$$\text{恒星月} = \text{周天度} / \text{月亮平均运动 } n'$$

$$\text{回归年} / \text{朔望月} = \text{章月} / \text{章岁}$$

故

$$\text{月亮平均运动 } n' (\text{月日平行度})$$

$$= \frac{\text{周天度}}{\text{恒星月}} = \frac{\text{章月}}{\text{章岁}} + 1 = \frac{\text{章月} + \text{章岁}}{\text{章岁}} = \frac{\text{小周}}{\text{章岁}}$$

以章岁为度法，则月亮日平行小周分。

损益率为月实行分与月平行分之差。这里，月实行、月平行皆以章岁为度法分。

盈缩并率乃其前各日损益率累加累减值。

盈缩积分是盈缩并率与因子  $\frac{\text{日法}}{\text{小周}}$  的乘积。

于是，月离表各栏数值可表述为如下形式：

月行迟疾度及分 = 月实行分

= 月实行度 × 章岁

损益率 = (月实行度 - 月平行度) × 章岁

= 月实行分 - 月平行分

盈缩并率 =  $\Sigma$  损益率

=  $\Sigma$  (月实行分 - 小周)

=  $\Sigma$  (月实行度 - 月平行度) × 章岁

盈缩积分 = 盈缩并率 × 日法 / 小周

=  $\Sigma$  损益率 × 日法 / 小周

正光、兴和两历计算合朔交会月食定大小余的方法也是相同的。由入历日数查月离表得入历日下损益率及盈缩积分。

定积分 = 盈缩积分 ±  $\frac{\text{入历日余} \times \text{损益率}}{\text{小周}}$

定小余 = 平朔望小余 ± 定积分

= 平朔望小余 ± 盈缩积分 ±  $\frac{\text{入历日余} \times \text{损益率}}{\text{小周}}$

盈减缩加。加满日法者进日。相减不足减时，减 1 日，加日法后减，则交会、月食加时在前日。

两历皆给出五星会合周期日分数。以日法除之，得五星会合周期日。由五星会合动态给出的一终行度，以会合周期除之得行

星的平均运动  $n$  (每日平行度)。根据下式可得恒星周期:

$$\text{恒星周期} = \text{周天度} / \text{每日平行度 } n$$

正光、兴和两历五星会合、恒星周期列于表 6-7。两历对火星、水星的认识较好,尤其火星优于前历。但木、土较粗略,逊于乾象、景初、元嘉、大明诸历。木星犹不及四分。同一时代的历学家信都芳指出,兴和元年十二月二十日(540 年 1 月 14 日),新历岁星在营室 13 度,顺,疾;天上岁星在营室 11 度,差 2 度。新历土星在角 11 度,留;天上镇星在亢 4 度,留,相差 5 度。新历太白在斗 25 度,晨见,逆行;天上金星在斗 21 度,逆行,相差 4 度。由此可对兴和历五星运动合天情况有个较明确的定量概念。

有关武成历、天保历的问题,我们将在第七章中谈及。

表 6-7 正光历、兴和历五星会合、恒星周期

五星	数		会合周期(日)			日平行度 $n$			恒星周期(日)	
	正光	兴和	正光	兴和	真值	正光	兴和	正光	兴和	真值
木星	2416660	6723888	398.789	398.807	398.88	0.08412	0.08416	4342.074	4339.966	4332.59
火星	4725848	13149083	779.843	779.898	779.94	0.53164	0.53168	687.007	686.966	686.980
土星	2291021	6374061	378.056	378.058	378.09	0.03389	0.03389	10777.15	10775.99	10759.2
金星	3538131	9843882	583.850	583.860	583.92					
水星	702182	1953716	115.872	115.879	115.88					



## 第七章 隋唐初历法大发展

### 第一节 日行盈缩的发现及在历法中的应用

公元 581 年,杨坚受周禅,建立隋朝,改元开皇,是为隋文帝。到元世祖至元十六年(1279)宋军兵败崖山,陆秀夫负帝投海死,宋亡,相距 698 年。至元十七年颁授时历,十八年(1281)施行。至此正好 700 年。隋唐时期,中国封建社会得到进一步发展,相应的历法也有长足的进步。这首先表现在,由于发现了日行和五星运动的盈缩,以及创立二次差内插法来处理日月五星不均匀运动的算法,提高了太阳、五星推步的精度。日月食的计算在月行迟疾外加上日行盈缩改正,使历法推步进入了一个新的历史时期。

《隋书·天文志》说:“古历五星并顺行,秦历始有金火之逆。又甘石并时,自有差异。汉初测候,乃知五星皆有逆行,其后相承罕能察。至后魏末,清河张子信,学艺博通,尤精历数。因避葛荣乱,隐于海岛中,积三十许年。专以浑仪测候日月五星差变之数,以算步之,始悟日月交道,有表里迟疾,五星见伏,有感召向背。言日行在春分后则迟,秋分后则速。”

张子信发现日行五星运动盈缩,以算步之,作出日行春分后迟,秋分后速的结论,约当 560~570 年。其后,“又有广平人刘孝孙、张孟宾二人,同知历事。孟宾受业于张子信,并弃旧事,更制新法。又有赵道严,准晷影之长短,定日行之进退,更造盈缩,以

求亏食之期。”“盈缩转度，阴阳分至，与漏刻相符，共日影俱合，循环无穷。上拒春秋，下尽天统（565～569年），日月亏食及五星所在，以二人新法考之，无有不合。”隋书律历志在这里记载了其门人张孟宾、刘孝孙将日行盈缩用人历法推步，收到了良好结果。北齐武平七年，“讫干敬礼及历家豫刻日食疏密。六月戊申朔（567年7月12日），太阳亏，刘孝孙言食于卯时，张孟宾言食于甲时，郑元伟、董峻言食于辰时，宋景业（天保历）言食于巳时。至日食，乃于卯甲之间。”可见张孟宾、刘孝孙由于加进了日行盈缩的改正，推步日月食时刻已远较郑元伟、董峻所上甲寅元历及宋景业之天保历精确。次年（577）正月，周兵入邺（北齐都城），二月齐亡于北周。各历短长“争论未定，遂属国亡”。刘孝孙、张孟宾历未得行用。

北周是时行露门学士明克让、麟趾学士庾季才制订的历法。大象元年（579）施行太史上士马显制订的丙寅元历（又称大象历）。后年（581）二月，相国杨坚建立隋朝，改元开皇，仍行丙寅元历。杨坚“方行禅代之事，欲以符命曜于天下。道士张宾，揣知上意，自云玄相，洞晓星历，因盛言有代谢之征，又称上仪表非人臣相。由是大被知遇、恒在幕府。”及受禅之初，擢宾为华州刺史，使与仪同刘晖、骠骑将军董琳及前朝治历者马显、郑元伟等，议造新历。宾等依何承天法（元嘉历），微加增损。四年（584）二月撰成奏上。高祖下诏曰：“宜颁天下，依法施用。”张宾历沿袭马显丙寅元历，故其疏陋与之不相上下。颁行以后，就遭到刘孝孙及冀州秀才刘焯的批评。称其学无师法，刻食不中，所失凡有六条。主要是，不用赵攸闰周法，而爱用19年7闰古章法；不识岁差；不会计算上元积年而另立五星己巳别元；不识定朔及日月五星盈缩进退步法。谓其历未能验影定气继承天所长，而合朔顺天，何氏所劣，宾等依据，循彼迷踪。从而其密不及元嘉。“盖是失其菁华，

得其糠粃者也。”刘晖、张宾串通一气，攻击孝孙，言其非毁天历，惑乱时人。孝孙、刘焯竟以他事斥罢。后来，张宾去世，刘孝孙再赴长安，又遭刘晖排斥。孝孙悲愤已极，乃抱书推棺到宫前哭诉，被抓起来报告朝廷。杨坚即命国子祭酒何妥安排评论孝孙与张宾历短长。这时，供职太史监的历算家张胄玄附和孝孙，一道批评张宾历。开皇十四年（594）七月，文帝查问日食测验事，杨素等奏，太史依张宾历所上 25 日食，仅 4 例近，他皆无验；而胄玄所定，前后适当，时起分数，合如符契；孝孙所定，验亦过半。杨坚遂有起用之意。孝孙趁机请斩刘晖，高祖不悦，改历之事再度搁置。不久，孝孙死，其历终未施行。

孝孙死后，杨素、牛弘等伤逝之，又荐胄玄。上召见之。胄玄因言日长影短之事，高祖大悦，令与参定新术。刘焯得知消息，便把孝孙历法略事增损，更名七曜新术，上奏。其术与胄玄之法，颇有参差，受到袁充与胄玄的诋毁，又未能成功。开皇十七年（597），胄玄历成。刘晖、刘宜等执旧历驳难，但得到通事舍人颜慤楚的支持。高祖才下决心斥罢刘晖等十人。胄玄所造历法，付有司施行。

胄玄历据刘焯、刘孝孙旧历改写，比张宾历确有进步，但仍有许多粗疏之处。开皇二十年（600），刘焯增修写定了他的著名历法皇极历，上书太子杨广。并于仁寿四年（604）历数胄玄历有六方面的问题，历术不合有六百余处。其中特别指出，开皇五年（585），胄玄曾上一历。而现今所行之胄玄历，与焯前历（七曜历）不异。且孝孙因焯，胄玄后附孝孙。历术之文，又皆是孝孙所作，则元本偷窃，事甚分明。上命仍下其书与胄玄参校。胄玄、刘焯互相驳难，是非不决，焯又罢归。大业四年（608），太史奏曰“日食无效”，帝召焯，欲行其历，又为袁充、胄玄相互勾结阻拦，而未能实现。不久，刘焯卒，一代名历竟终未颁行。但历算家咸称其妙。

所以皇极历得以著录而保存了下来。

胄玄学祖冲之，兼传其师法。开皇十四年日食验历，“胄玄所克，前后妙衷，时起分数，合如符契”，他是懂历法的。其开皇十七年所行历术，命冬至起虚 5 度，后稍觉其疏。至大业四年刘焯卒后，乃敢改法。上元冬至日躔，修正为命起虚 7 度。诸法率更有增损。经改定的历法通称大业历。现在历志所传即为此术。自大业五年(609)，行用到隋恭帝杨侑义宁二年(618)。

开皇十七年颁行的张胄玄历，史无记载。根据焯、玄驳难，知胄玄改正日行盈缩、月行迟疾，仅考虑一次差，不如皇极精确；日躔表组成数据比较粗疏，甚至还有不合理的地方；计算定朔的方法和岁差常数可能也不完善。

大衍历议日度议说，刘孝孙甲子元历，推太初冬至在牛初，下及晋太元、宋元嘉皆在斗 17 度，开皇十四年在斗 13 度。而刘焯皇极历仁寿四年冬至日在黄道斗 10 度，赤道斗 11 度。其后孝孙改从焯法，而仁寿四年(604)冬至，日亦在斗 11 度。

《隋书·律历志》载，刘孝孙谈到甲子元历的冬至日躔时说，汉书武帝太初元年丁丑岁，落下闳等考订太初历冬至之日，日在牵牛初。今以甲子元历术算，即得斗末牛初矣。晋时有姜岌，又以月食验于日度，知冬至之日日在斗 17 度。宋文帝元嘉十年癸酉岁，何承天考验乾度，亦知冬至之日日在斗 17 度。虽言冬至后上三日，前后通融，只合在斗 17 度。但尧年汉日，所在既殊，唯晋及宋，所在未改，故知其度，理有变差。至今大隋甲辰(584)之岁，考订历数象，以稽天道，知冬至之日日在斗 13 度。

《开元占经》卷一百〇五，给出孝孙甲子元历基本法数及各历冬至所在。

姜岌历冬至在斗 17；宋何承天元嘉历，雨水室 2 度；周甄鸾天和历冬至日在斗 15 度；周马显丙寅元历冬至日在斗 12 度。

刘孝孙历上元甲子至今开元二年甲寅(714)435230 算外。

章岁 619      元法 160940      纪法 8047

日法 1144      岁余 1966      虚分 6407

差分 509      度法 24141      行分 39

会月 2013      会率 341      周法 34320

历朔差分 67442

冬至命度起危前 5 度

虚分 6407,意思是说周天度 365 加  $6407/24141$  的余分 (0.2654 度)附于虚宿。由上述法数得出:

岁差 =  $509/24141 = 0.021084$  度/年

或 47.4283 年/度。斗分为  $6407 - 509 = 5898$ ,故

岁实 =  $365 + 5898/24141 = 365.244315$  天

章岁 619 年为 32 章另 11 年,设 228 闰( $=32 \times 7 + 4$ )。纪 13 章,元 20 纪。岁余为  $5898 \times 8047/24141$ 。章月  $7656 (=619 \times 12 + 228)$ ,纪月 =  $13 \times$  章月 = 99528。纪日 =  $8047 \times 365 + 1966 = 2939121$ 。月法 = 纪日/87 = 33783 = 朔策  $\times$  日法 1144。日法 = 纪月/87。

朔策 = 纪日/纪月 =  $29 + 52809/99528 = 29.53059441$  日

隋开皇四年(584)甲辰岁距元积 435101 年。由上述岁差值,知上元距开皇四年冬至日躔已西行 42.234 度。即甲子元历上元冬至日躔在甲辰冬至赤道日度斗 13 度以东 42.23 度。斗宿共 26 度,尚余 13 度,加牛 8、女 12、虚分 0.26 度,可得知上元命起虚宿 9 度。合计 42.26 度。为上元冬至日躔所在。

刘焯历取仁寿四年(604)冬至,日在赤道斗 11 度、黄道斗 10 度,此值较合于天。孝孙后来改而从之。于是甲子元历冬至命起改为虚 7 度,以与刘焯推定的仁寿冬至日躔相合。

张胄玄开皇十七年(597)历上元起虚 5 度。因此历失传。从

大业历岁差数值看,很可能亦沿袭刘焯、孝孙,定斯时冬至赤道日躔斗 11 度。大业历岁差为  $503/42640 = 0.011796$  度/年,或 84.7714 年/度。由大业历上元至大业四年积年为 1427644,上元冬至日躔虚 5 度应在开皇仁寿以东 39.4 度。可知隋时冬至太阳在斗 11 度。太初元年(前 104)距仁寿四年(604)707 年。由大业历岁差常数,707 年冬至点西行 8.34 度。推太初元年冬至日在斗 19.9 度,距牛初 6 度许,相距过远。故大业四年刘焯卒后,改为上元起虚 7 度。诸法率更有增损。

现以大业历推日度术,计算太初(前 104)、永平甲子(64)冬至赤道日度。方法是,置入元至所求年(上元积年),以岁分 15573963 乘之为通实,满周天分 15574466 去之,余如度法 42640 而一,为积度。不尽为度分。命度以虚 7 度宿次去之,经斗去其分,度不满宿,算外,即所求年天正冬至日所在度分。

太初元年(前 104)距元积年 1426933,积度 334.21;永平七年(64)距元积年 1427100,积度 332.38。以虚 7 度后各宿度去之,得太初元年冬至日在斗 23 度,永平七年冬至日在斗 21 度。这个结果与大衍历议所考及后汉四分历相合。但是仁寿四年,冬至日在斗 13 度却与其时气象不合。这一点又不及胄玄前历了。

《隋书·律历志》著录的张胄玄大业历,就是已经过修改为冬至上元命度起虚 7 度、大业四年(608)戊辰冬至日在斗 13 度的历法。

## 第二节 张宾历和大业历

### 一、张宾历的基本用数

隋开皇四年(584)二月颁行张宾历,行用到开皇十六年(596),凡 13 年。历法基本用数如下:

上元积年:上元甲子至开皇四年甲辰(584),积 4129001,算上(甲子计人)。

元法 6177600(元 6 纪,纪 10 蓐)

纪法 1029600

蓐法 102960(亦名度法)

蓐 240 章

蓐月  $240 \times \text{章月}$

章岁  $429 (= 19 \times 22 + 11)$

章闰  $158 (= 7 \times 22 + 4)$

章月  $5306 (= 429 \times 12 + 158)$

通月 5372209(以日法除之为朔策)

日法(亦名周法)  $181920 (= 240 \times \text{章月} / 7)$

虚分(朔虚分)  $85391 (= 30 \times \text{日法} - \text{通月})$

朔时法 15160(12 分日法得一时之数)

周天分(亦名蓐日、没分)  $37605463 (= 365 \times \text{蓐法} + \text{斗分})$

余数(亦曰没法) 539863(以蓐法除之加 360 得岁实,即回归年的日数)

岁中 12(岁之中气数)

斗分 25063(以蓐法除之得回归年日的奇零)

气法 24(二十四节气,以气法除岁实得气策)

气时法 8580(12 分蓐法得 1 时之数)

会月 1297

会率 221

一交、食月、食周 = 会月 / 会率 = 5.868778281 月

会数 110.5

交食年 = 会月 / 会数 = 346.6172328 日

会分 1187258189

会分/会率=通月

会通(亦曰交数)6967755073

会通/会月=通月

会日法 40204320

会日法/会率=日法

会日 173

余 56143

小分 110

$$\text{会日} = 173 \frac{56143 \frac{110}{221}}{181920} = 173.308616412$$

会虚 125776

小分 111

会日的虚分=174-会日

会日限 158

余 98838

小分 220.5

会日限=会日一半朔望月

$$= 158 \frac{98838 \frac{220.5}{221}}{181920} = 158.54331$$

朔望合日数 14

余 139224

小分 110.5

$$\frac{1}{2} \text{朔望月} = 14 \frac{139224 + \frac{110.5}{221}}{181920} = 14.76530618 \text{ 日}$$

交法 512104800

交分法 2815



交法/交分法=日法

阴阳历 13

余 110263

小分 2328

$$\text{半交点月} = 13 \frac{110263 \frac{2328}{2815}}{181920} = 13.606111626 \text{ 日}$$

历合 27

余 38607

小分 1841

$$\text{交点月} = 27 \frac{38607 + \frac{1841}{2815}}{181920} = 27.212223252 \text{ 日}$$

朔差 2

余 57921

小分 974

$$\text{朔望月} - \text{交点月} = 2 \frac{57921 + \frac{974}{2815}}{181920} = 2.318389 \text{ 日}$$

望差 1

余 28960

小分 1894.5

$$\frac{1}{2} \text{朔差} = 1 \frac{28960 + \frac{1894.5}{2815}}{181920} = 1.159194553 \text{ 日}$$

食限 12

余 81303

小分 433.5

日食前限=阴阳历一望差=12.44691707

通周 5012699

近点月=通周/日法

周日 27

余 100859(亦名小大法)

近点月=27  $\frac{100859}{181920}$  = 27.55441403

周虚 81061(=日法一周日余 100859)

通率 7(蓂日、蓂月与通月、日法的公约数)

定差 44548

差虚 137372(=日法一定差)

转率 240

分率 758

转率 $\times$ 分率=日法

日周 1376400

日周/小周=240

小周 5735(=章岁 429+章月 5306)

小周/章岁=月日行度

岁星合率 41063889

荧惑合率 80297926

镇星合率 38925413

太白合率 60119655

辰星合率 11931125

以蓂法除之,得五星会合周期。

朔策=蓂日/蓂月=通月/日法=29.53061236

岁实=360+余数/蓂法=365+斗分/蓂法  
=365.243424631

近点月=通周/日法=27.55441403

以上《隋书·律历志》和《开元占经》所传张宾历全部基本用数。由此可步其时中朔,得出历日,了解五星会合、日月交会的大

致情况。没有给出月行迟疾损益率、盈缩积分及五星实测之度。推步月行迟疾改正、日月交食、五星运动和位置有一定困难。张宾历不用岁差和日行盈缩改正,是它的主要欠缺。此后行用的历法都加进了这方面的内容,历法推步和精度进入了一个新的历史时期。在历法规定以无中气之月为闰月之后,闰周的设置实际是多余的。唐后历家不讨论闰周数值也能制订较好的历法。在南北朝和隋,历家仍用改良的闰周来调整回归年数和朔望月数的比率,以期得出较准确的岁实和朔策。张宾历用 429 岁 158 闰,可以表示为  $(19 \times 22 + 11 =) 429$  岁设  $(7 \times 22 + 4 =) 158$  闰。各家闰周皆可用  $(7n+4)$  闰/ $(19n+11)$  岁来表示。其中  $n$  为正整数。历代闰周中以祖冲之大明历的 391 岁 144 闰( $n=20$ )最为准确,其他历法都嫌设闰稍多。刘孝孙、刘焯攻张宾之失,言学无师法,刻食不中,所驳凡六事。其一云,何承天不知分闰之有失,而用 19 年 7 闰。而这一条意见恰巧稍欠针对性。

## 二、大业历

自隋文帝开皇十七年(597)丁巳始用张胄玄历,至炀帝大业三年丁卯凡 11 年。大业四年刘焯卒后,张胄玄对他的历法做了修改,上元冬至起虚 5 度,改为命起虚 7 度,诸法率更有增损。自炀帝大业四年(608)戊辰始用,迄恭帝义宁二年戊寅(618)凡 11 年。胄玄前历无传。经过修改的历称大业历,《隋书·律历志》有著录。目前历表,自开皇十七年(597)至义宁二年(618)这 22 年的历谱皆依大业历术推出。胄玄师法祖冲之,步日月有盈缩之算,推五星有平定之率,其推步历日交食,较前法为详,基本合天。大业历基本用数如下:

上元积年:自甲子元至大业四年戊辰,积 1427644 年,算外(甲子不计入)。

章岁 410

章闰  $151 (= 7 \times 21 + 4)$

章月 5071

日法 1144

月法 33783

辰法  $286 (= 1/4 \text{ 日法})$

岁分 15573963

度法 42640

没分 5191321

没法 74521

经过 5191321 日有没日 74521 个。

周天分 15574466

斗分 10866

气法  $469040 (= \text{章岁} \times \text{日法})$

气时法  $10660 (= 1/4 \text{ 度法})$

朔余 607

岁差 503

周日 27

日余 1413

周法 2548

周通 70209

交会通(比古会日)10646729

朔差(比古会数)907057

冬至命度虚 7 度

望差 453528.5

会时法 32604

望数 5776893

外限 4869836

内限 10193200.5

中限 5649404.5

次限 10326089

$$\begin{aligned}\text{岁实} &= \text{岁分} / \text{度法} = 365 \frac{\text{岁余}}{\text{度法}} \\ &= 365 \frac{10363}{42640} = 365.2430347\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{朔策} &= \text{月法} / \text{日法} = 29 \frac{\text{朔余}}{\text{日法}} \\ &= 29 \frac{607}{1144} = 29.53059441\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{转周(近点月)} &= \text{周通} / \text{周法} = 27 \frac{\text{日余}}{\text{周法}} \\ &= 27 \frac{1413}{2548}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{周天} &= \frac{\text{周天分}}{\text{度法}} = 365 \frac{\text{斗分}}{\text{度法}} = 365 \frac{10866}{42640} \\ &= 365.2548311\end{aligned}$$

$$\text{小周} = \text{章岁} + \text{章月} = 410 + 5071 = 5481$$

$$\text{月日行度} = \frac{\text{小周}}{\text{章岁}} = 13 \frac{151}{410}$$

$$\text{没长(没日时距)} = \frac{\text{没分}}{\text{没法}} = \frac{\text{岁实}}{(\text{岁实} - 360)}$$

$$\text{会日法} = 12 \times \text{会时法} = (\text{朔差} + \text{会通}) \times \frac{\text{日法}}{\text{月法}}$$

$$\text{朔差} = \text{朔望月} - \text{交点月(交周)}$$

$$\text{交周} = \frac{\text{会通}}{\text{会日法}} = 27 \frac{83033}{391248} = 27.212226$$

以会日法除交食各限,得各限日分值。

大业历在颁行历法中首先将日行盈缩引入。其法和数虽比

较粗疏,但后世各历合朔、交会、日月五星运动推步的改善实应归本历创建之功。

大业历术载有太阳视运动不均匀性的改正数值表,即日躔表。此后诸历历术皆行列出。它给出各气日行的损益率和盈缩数。并将日行盈缩改正应用于计算发生日月食定朔望的时刻。在“求朔望入气盈缩术”中,介绍了推算方法。

以入气日算乘损益率,如15得1,余8已上,从1;以损益盈缩数为定盈缩。

对于气中某日的盈缩数,大业历采用线性内插的方法得出。如何在计算定朔时刻中,加进日行盈缩和月行迟疾的改正,在“推朔望加时定日及小余术”中,张胄玄是这样说的:

以入历日余乘所入历日损益率,以损益盈缩积分,如差法而一,为定积分。乃与入气定盈缩,皆以盈减、缩加本朔望小余;不足减者,加时在往日;加之,满日法者去之,则在来日;余为定小余。无食者不须气盈缩。即:

加时定日及小余=平朔望小余±定积分±入气定盈缩

其中,定积分为月亮改正,入气定盈缩为太阳改正。差法为月实行速减日平行速,由月离表给出。这是正确的算法。在正光、兴和、皇极、麟德、大衍诸历中,皆以月平行入算计算月亮改正。本书后面将要介绍,后者是比较粗疏的做法,理论上也不严谨。

太阳改正(入气定盈缩)中的损益率、盈缩数由日躔表给出。盈缩数为损益率的累积数,损益率为本气内太阳实行度、平行度之差与月平行度之比,与日法之乘积。

定积分(月亮改正)中的损益率、盈缩积分、差法由月离表给出。月离表数值共分六栏,列出近点月内每日的转分、转法、损益率、盈缩积分和差法。转分为近点月内每日月亮实行分。每日实行度=转分 $\times 10/410$ =转分/41。转法是前后日转分之差。损益

率 $= (10 \times \text{转分} - \text{月平行分}) \times \text{日法} 1144 / \text{周法} 2548$ 。盈缩积分  
为每日转分 $\times 10 - \text{月平行分}$ ，所余与日法相乘，内减常数 17，其值  
的累积数。即：

$$\text{盈缩积分} = \Sigma [(10 \times \text{转分} - \text{月平行分}) \times \text{日法} - 17]$$

$$\text{差法} = \text{月实行分} - \text{日平行分}$$

$$\begin{aligned} \text{月日平行分} &= \text{月平行度} \times \text{章岁} = \text{章月} + \text{章岁} \\ &= 5071 + 410 = 5481 \end{aligned}$$

$$\text{月平行分} - \text{日平行分} = 5481 - 410 = 5071$$

分母是章岁 410，日平行 1 度，即 410 分。

$$\text{月日实行度} = \text{转分} \times 10 / 410$$

$$\text{差法} = (\text{月日实行度} - \text{日平行度}) \times 410$$

如月离表入历 1 日，转分 601，月日实行度为 14.6585，日平行  
1 度，差法为  $(14.6585 - 1) \times 410 = 5600$ 。入历 2 日，转分 595，月  
日实行度为 14.5122，差法为  $13.5122 \times 410 = 5540$ 。

这样，根据入气日、入历日，就可以计算出入气定盈缩和定积  
分，即太阳、月亮改正。加减平朔望，即可得出食月的定朔望大  
小余。

$$\text{月日平行度} = (\text{章月} + \text{章岁}) / \text{章岁}$$

$$\text{月日平行分} = \text{章月} + \text{章岁}$$

关于这两式的论证，我们将在本书的后面章节中给出。

在推交会术、推入交法中，大业历对入交日的改正，只考虑太  
阳的盈缩作用，未计及影响较小的月亮迟疾运动的因素。改正公  
式为：

$$\text{入交定余} = \text{入交日余} \pm \text{气差}$$

冬至后加，夏至后减。术中，大业历把气差改正按节气分为八段，  
给出各自数值。

大业历首先引进太阳、五星运动盈缩对五星的始见位置、时

刻进行修正,并用匀加速运动方法计算行星行度。大业历推五星术,分为两步:一求星见术,二为行五星法。求星见术说:置通实,各以数去之,余以减数,其余如度法减1为日,不尽为日分,即所求年天正冬至后晨平见日及分(其金水,以夕见伏日去之,得者余为夕平见日及分);求晨平见月日,置冬至去朔日数及分,各以冬至后日数及分加之,分满度法从日,起天正月,依大小去之,不满月者为去朔日,命日算外,即星见所在月日及分;求后见,各以终日及分加之,满去如前(其金、水各以晨夕加之,满去如前,加晨得夕,加夕得晨)。

其中,通实=积年 $\times$ 岁分,“数”、“终”为以分(度法)、日表示的五星会合周期,为推五星术的基本法数。大业历以星晨始见作为上元时刻。

内行星在会合周期内两次与日相合(上、下合)。古历称上合经东大距至下合段为“夕见伏”,称下合经西大距至上合段为“晨见伏”。因此,若所求年冬至后晨平见日及分大于夕见伏段,则减去夕见伏日数,所余即夕平见日及分。金水二星晨见伏、夕见伏段长度不一,且动态相反,所以确定金水二星的晨见时刻的属段是必要的。

按求星见术,由会合周期推出的五星晨见东方时刻为星平见时刻。行星的轨道运动为椭圆,由于中心差,五星实际星见时刻或早或迟。因此需经五星运动盈缩改正,得定见时刻。

定见时刻=平见时刻 $\pm$ 行星盈缩改正

大业历,以节气为标准,根据各段入气日数,分段给出行星盈缩改正的数值和算式。

大业历之前,推算五星行度,皆按行星会合周期内各动态段,以平行度计算。大业历引入等差级数的方法计算五星运动,大大提高了五星行度推步的精度。



行五星法,首先计算星初见所在位置。术文说:置星定见之前夜半日所在宿度算及分,各以定见日分加其分,满度法从度。又以星初见去日度数,晨减夕加之,满去如前,即星初见所在度及分。

星定见之前夜半日所在宿度由推日度术推得。依上求出定见日分。星初见去日度数,求星见术中已给出:木,初见伏去日各14度;火,17度;土,17度;金,11度;水,17度。

下面以木星为例,介绍大业历步五星行度的新方法。木星动态为:

初见,顺,日行10618分,日益迟60分,114日行19度13832分而留。26日乃退,日6101分,84日退12度804分。又留25日37612分、小分4,乃顺。初日行3837分,日益疾60分,114日行19度13718分而伏。分母为度法。动态如表7-1所示。

表 7-1 大业历木星动态

	初顺	前留	退	后留	后顺	夕伏
初行速分	10618	0	6101	0	3837	
公差分	-60	0		0	60	
日数	114	26	84	25 $\frac{37612}{42640}$	114	35
总行度	19 $\frac{13832}{42640}$	0	12 $\frac{804}{42640}$	0	19 $\frac{13718}{42640}$	

木星在初顺段先疾后迟,后顺段先迟后疾,退行段为匀速运动。大业历采用等匀加速运动等差级数求和方法处理初顺和后顺段的运行。

顺段总行度=段日 $\times$ [初日行速+(段日-1)

$\times$ 公差(每日速度变化)/2]/度法

代入数值,得:

$$\text{初顺总行度} = 114 \times \frac{[10618 + (114 - 1) \times (-60)/2]}{42640}$$

$$= 19 + 13832/42640 \text{ 度}$$

初顺段日益迟,故公差为负。后顺段有:

$$\text{后顺总行度} = 114 \times \frac{[3837 + (114 - 1) \times 60/2]}{42640}$$

$$= 19 + 13718/42640 \text{ 度}$$

在会合周期各动态段内任一时刻的木星行度为:

初顺段,入段日  $n \leq 114$ ,木星行益迟

$$\text{初顺行度} = \frac{10618n + n(n-1)(-60)/2}{42640}$$

前留段,入段日  $n \leq 26$ ,行星不动

$$\text{前留行度(位置)} = 19 + 13832/42640$$

退段,入段日  $n \leq 84$ ,行星按匀速逆行

$$\text{退段行度} = 19 + 13832/42640 - 6101n/42640$$

后留段,行星停止不动,入段日  $\leq 25.882$

$$\text{后留段行度} = 19 \frac{13832}{42640} - 12 \frac{804}{42640} = 7 \frac{13028}{42640}$$

后顺段,木星日益疾,入段日  $\leq 114$

$$\text{后顺段行度} = 7 \frac{13028}{42640} + \left[ 3837n + \frac{n(n-1)}{2} \times 60 \right] / 42640$$

知道了星初见所在度分,计算出木星在初顺、前留、退、后留、后顺各段入段日的行度,就得出木星的位置。

此外,大业历以辰刻计时制度给出二十四节气日出日没时刻。这也是中国历法中的第一份日出日入时刻表。

### 第三节 刘焯皇极历的创法

隋大业四年(608),炀帝驾幸汾阳宫,太史奏“日食无效”。帝

召刘焯，欲行其历，又为袁充、胄玄结伙反对而作罢。又会焯死，一代名历竟未施行。历家皆称其妙。于是李淳风撰写的《隋书·律历志》详细著录了皇极历，使其术得以传世。刘焯泉下有知，应该也是很大的安慰。

皇极推五星以气日法为度法，所推皆密于前历。又推日月食所在，食之起迄，食分多少，及应食不食，不应食而食诸法，皆为前历所无，并立定朔法、定气法及躔衰法，为后世所宗。其术对后世有深远的影响。何承天因合朔交食不在朔望，因以盈缩定其小余，以正朔望之日。故定朔之法为何承天首倡。而刘焯用以治历，至唐初以后历法施行之。刘焯首用定气，大衍以后诸历皆有推定气之法。但直到清初行用西法，历书才用定气注历。诸历推日月度轨漏交会依定气，而注历皆以平气。皇极历日躔表开始列出躔衰——各气太阳实行与平行之差数，也为以后诸历所采用。

### 一、皇极历的基本用数和步法

上元积年：甲子元距隋仁寿四年(604)甲子，积 1008840，算外。

岁率(即章岁)  $676 (= 19 \times 35 + 11)$

月率(章月)  $8361 (= 7 \times 35 + 4 + 676 \times 12)$

朔日法 1242

朔实 36677

朔策 = 朔实 / 朔日法 =  $29 \frac{659}{1242} = 29.530595813$

旬周(甲子周期) 60

朔辰  $103.5 (= \text{朔日法} / 12)$

小周 = 月日平行分 = 岁率 + 月率 = 9037

月日平行度 = (岁率 + 月率) / 岁率 =  $13 \frac{249}{676}$

皇极历 676 岁有 249 闰  $(7 \times 35 + 4) 8361$  月。每年有  $\frac{249}{676}$  个闰

月,称一年的闰衰。年12月,则每月有 $\frac{249}{676}/12=\frac{20.75}{676}$ 个闰月,名

月闰衰。 $0.75=\frac{3}{4}$ ,为大(凡四分者,皆一为小,二为半,三为大,

四为全)。故皇极历推朔术谓每月加闰衰20大。

日分制:日、余、秒、么。

度分制:度、分、篲、么。

三分法:少、太、全。

四分法:小、半、大、全。

气日法 46644

岁数 17036466.5

度准 338

约率 9

气辰 3887(=气日法/12)

会通 897(=气日法/日千元 52)

秒法 48

么法 5

$$\text{岁实} = \text{岁数} / \text{气日法} = 365 \frac{11406.5}{46644} = 365.2445438$$

中历计算平气、平朔、入转,通用的方法是:先求出上元至所求年年前冬至日的积日;再由积日分别求出天正冬至大小余,冬至月龄(又称闰余),即冬至距天正经朔的时日,以及冬至与其前近地点(或远地点)的时距。

$$\text{积日} = \text{上元至所求年积年数} \times \text{岁实}$$

$$\text{天正冬至大小余} = [\text{积日} / \text{纪法 } 60]_R$$

$$\text{冬至月龄(闰余)} = [\text{积日} / \text{朔策}]_R$$

$$\text{天正经朔大小余} = \text{冬至大小余} - \text{闰余}$$

$$\text{冬至近地点距} = [\text{积日} / \text{近点月}]_R$$

天正经朔入转日 = 冬至近点距 - 闰余

$R$  表示求方括号内算式的余数。

以上各式奠定了历法推步的基础。皇极历却另辟蹊径。推经朔术云：

置入元距所求年，月率乘之，如岁率而一，为积月，不满为闰衰。朔实乘积月，满朔日法得一，为积日，不满为朔余。旬周去积日，不尽为日，即所求年天正经朔日及余。即：

$$\begin{aligned} & \text{入元距所求年} \times \text{月率 } 8361 / \text{岁率 } 676 \\ & = \text{积月} + \text{闰衰} / \text{岁率 } 676 \\ & \text{朔实 } 36677 \times \text{积月} / \text{朔日法 } 1242 \\ & = \text{积日} + \text{朔余} / \text{朔日法 } 1242 \end{aligned}$$

用旬周累去积日，至不足减时（小于旬周 60），余数，即所求年天正经朔日及小余。

按前述求余表示法，有：

$$\begin{aligned} \text{闰衰} &= [\text{入元距所求年} \times \text{月率} / \text{岁率}]_R \\ \text{朔余} &= [\text{朔实} \times \text{积月} / \text{朔日法}]_R \\ \text{天正经朔大小余} &= [\text{积日} / \text{旬周}]_R \end{aligned}$$

由天正经朔可得出上下弦、望、后朔经日。

$$\text{上弦经日及余} = \text{经朔大小余} + 7 \frac{475.25}{1242}$$

$$\text{经望大小余} = \text{经朔大小余} + 14 \frac{950.5}{1242}$$

$$\text{下弦经日及余} = \text{经朔大小余} + 22 \frac{183.75}{1242}$$

$$\text{次朔} = \text{经朔大小余} + 29 \frac{659}{1242}$$

$$\text{次月闰衰} = \text{天正经朔闰衰} + 20.75$$

每月加闰衰 20.75，得各月之闰衰。

皇极历推气术说：

半闰衰乘朔实，又度准乘朔余，加之，如约率而一，所得满气日法为去经朔日，不满为气余。以去经朔日，即天正月冬至恒日定余。

冬至一定在天正月内。闰衰、朔余皆由求天正经朔时得出。度准、约率为基本法数。有

$$\frac{(\text{半闰衰} \times \text{朔实} + \text{度准} 338 \times \text{朔余}) / \text{约率} 9}{\text{气日法} 46644}$$

$$= \text{去经朔日} + \text{气余} / \text{气日法}$$

$$\text{天正冬至大余} = \text{天正经朔大余} + \text{去经朔日}$$

$$\text{天正冬至小余} = \text{气余} / \text{气日法}$$

天正冬至大小余即交冬至恒气的日期时刻，故命日甲子算外，即恒冬至干支时刻。

转终日 27

余 1255

终法 2263

终实 62356

终全余 1008 (= 终法 2263 - 终余 1255)

近点月(转终) = 终实 / 终法 = 27.5545736

转法 52

蔑法 897 (= 气日法 46644 / 转法 52)

闰限 676 = (月率 8361 - 闰率 249) / 12

推入转术：

终实去积日，不尽，以终法乘而又去，不如终实者，满终法得一日，不满为余，即其年天正经朔夜半入转日及余。

皇极历直接用上元以来积日,求天正经朔夜半距近地点的日数和余数。为避免大数字运算,将终实除积日,与终法乘积求余,化成了两次求余运算。即先求  $r_1 = [\text{积日}/\text{终实}]_R$ ,次求  $[(r_1 \times \text{终法})/\text{终实}]_R$ ,得天正经朔夜半入转日+小余/终法。

要计算定朔望,必须先求出平朔望入转日分进行月行迟疾的改正。皇极历“求经辰所入朔弦望”即求经朔望所入日及余方法如下:

经余变从转,不成为秒,加其夜半所入,皆其辰入日及余。因

朔辰所入,每加  $7 \frac{865 \frac{1160.75}{1242}}{2263}$ ,秒满日法成余,亦得上弦。望、下

弦、次朔经辰所入径求者,加望日 14,余 1731,秒 1079.5;下弦日 22,余 334,秒 998.25;次朔日 1,余 2208,秒 917。亦朔望各增日 1,减去全余;望 531,秒 162.5;朔 54,秒 325。

首先要将经朔望由以朔日法为分母的小余改换成以终法表示,即需将小余分母由日法变成终法,将“经余变从转”,为此分子需乘一个  $\frac{2263}{1242}$  的因子。经朔小余换成以终法为分母以后,再加前面得出的天正经朔夜半入转日及余,即得天正经朔所入日及余。

$\frac{1}{4}$  朔望月为上弦,半为望,  $\frac{3}{4}$  为下弦。上弦  $7 \frac{475.25}{1242}$ ,“经余变从转”,分母换成终法 2263,分子需乘因子  $\frac{2263}{1242}$ ,于是上弦由

$7 \frac{475.25}{1242}$  变分母后成  $7 \frac{865 \frac{1160.75}{1242}}{2263}$ ,这样有:

$$\text{上弦所入转日、余} = \text{经朔所入转日、余} + 7 \frac{865 \frac{1160.75}{1242}}{2263}$$

同理可得:

$$\text{经望入转日及余} = \text{经朔所入日、余} + 14 - \frac{1731 \frac{1079.5}{1242}}{2263}$$

$$\text{下弦入转日及余} = \text{经朔所入日、余} + 22 - \frac{334 \frac{998.25}{1242}}{2263}$$

$$\text{次朔入转日及余} = \text{经朔所入日、余} + 1 - \frac{2208 \frac{917}{1242}}{2263}$$

因为

$$\text{朔实一转终日} = 1 - \frac{2208 \frac{917}{1242}}{2263}$$

而

$$1 - \frac{2208 \frac{917}{1242}}{2263} = \frac{54 \frac{325}{1242}}{2263}$$

$$1 - \frac{1731 \frac{1079.5}{1242}}{2263} = \frac{531 \frac{162.5}{1242}}{2263}$$

所以朔望入转也可如下得出：

$$\text{经望入转日、余} = \text{经朔入转日、余} + 15 - \frac{531 \frac{162.5}{1242}}{2263}$$

$$\text{次朔入转日、余} = \text{经朔入转日、余} + 2 - \frac{54 \frac{325}{1242}}{2263}$$

求入辰法度：

度法 46644

周数 17037076

周分 12016

周差 609.5 (= 周分 12016 - 岁分 11406.5)



为岁差分,以度法 46644 为分母。

$$\text{周天度} = \frac{\text{周法}}{\text{度法}} = 365 \frac{12016}{46644} = 365.2576108$$

复月 5458

交月 2729

交率 465

交数 5923(=复月+交率)

交法 7356366(=交数×朔日法)

会法 577530(=交率×朔日法)

交复日 27 余 263 秒 3435

交日 13 余 752 秒 4679

交限 12 余 555 秒 473.5

望差日 1 余 197 秒 4205.5

朔差日 2 余 395 秒 2488

食限 158 余 676 秒 50.5

会日 173 余 384 秒 283.

交复日(交点月)=复月×朔望月/交数

$$= \frac{\text{复月} \times \text{朔实}}{\text{交数} \times \text{朔日法}}$$

$$= 27 \frac{263 \frac{3435}{5923}}{1242}$$

$$= 27.21222217$$

$$\text{交日} = \frac{1}{2} \text{交复日} = 13 \frac{752 \frac{4679}{5923}}{1242} = 13.60611109$$

交复率=复月×朔实=200183066

$$\text{交食年} = \frac{\text{交复率}}{\text{会法}} = \frac{\text{复月} \times \text{朔实}}{\text{交率} \times \text{朔日法}}$$

$$= 346 \frac{769 \frac{101}{465}}{1242} = 346.6193375$$

交复日 = 交复率 / 交法

朔差 = 朔望月 - 交点月

$$= \frac{36677 \times 5923 - 200183066}{7356366}$$

$$= 2 \frac{395 \frac{2488}{5923}}{1242} = 2.318373637$$

$$\text{望差} = \frac{1}{2} \text{朔差} = 1 \frac{197 \frac{4205.5}{5923}}{1242} = 1.159186819$$

交限 = 交日 - 望差

$$= 13 \frac{752 \frac{4679}{5923}}{1242} - 1 \frac{197 \frac{4205.5}{5923}}{1242} = 12 \frac{555 \frac{473.5}{5923}}{1242}$$

$$\text{会日} = \frac{1}{2} \text{食年} = 346 \frac{769 \frac{101}{465}}{1242} / 2 = 173 \frac{384 \frac{283}{465}}{1242}$$

会限 = 会日 -  $\frac{1}{2}$ 朔望月

$$= 173 \frac{384 \frac{283}{465}}{1242} - 14 \frac{950 \frac{232.5}{465}}{1242} = 158 \frac{676 \frac{50.5}{465}}{1242}$$

皇极历推天正经朔入交，第一步先推月行人交表里（黄道内外），第二步推月平入交日及余。其“推月行人交表里”的方法是：

置入元积月，复月去之，不尽，交率乘而复去。不如复月者，满交月去之，为在里数。不满，为在表数。即所求年天正经朔入交表里数。

求次月，以交率加之，满交月去之，前表者在里，前里者在表。

与推天正经朔入转方法类似，为避免大数字运算，将复月除

上元积月与交率乘积求余,即将入交表里数 $=[\text{上元积月} \times \text{交率} / \text{复月}]_R$ ,化成了两次求余运算。先求

$$[\text{上元积月} / \text{复月}]_R = r_1$$

次求

$$\text{入交表里数} = [r_1 \times \text{交率} / \text{复月}]_R$$

入交表里数如大于交月(2729),去之,为在里数;入交表里数不满交月,为在表数。此即所求年天正经朔入交、月在黄道内外数。

天正经朔入交表里数,加交率得次月入交表里数。如和满交月,则去之(内减交月),如此,则前月在表者,改为在里;前月在里者易为表。

推月入交日的方法是:以朔实乘表里数,为交实;满交法为日,不满者交数而一,为余,不成为秒。命日算外,即其经朔月平入交日、余。求望,以望差加之,满交日去之,则月在表里与朔同;不满者与朔反。

$$\text{交实} = \text{朔实} \times 36677 \times \text{表里数}$$

$$\text{朔实} \times \text{表里数} / \text{交法} = \text{交实} / (\text{交数} \times \text{朔日法})$$

$$= \text{经朔月平入交日} + \text{余} \frac{\text{秒数}}{\text{交数}} / \text{朔日法}$$

$$\text{望日平入交日、余} = \text{经朔入交日、余} + \text{望差}$$

满交日去之,这只有经朔入交大交于交限方可能。如设经朔入交月原在里,此时月定距降交点不远(小于望差)。则望日入交,月必刚过升交点,距其很近。故望月仍在里,即月在表里与朔同。望入交日余不满交日情况下,仍设经朔入交月原在里,但位于升至降交点之间,则望日入交月必过降交点而未达升交点,在黄道外,故表里与朔反。

$$\text{次月平入交日、余} = \text{经朔入交日、余} + \text{朔差}$$

满交日,去之,则表里与前月反;不满交日,表里与前月同。

“推日入会日术”为：

会法除交实为日，不满者，如交率为余，不成为秒，命日算外，即经朔日入平会日及余。

$$\begin{aligned}\text{交实/会法} &= \text{入交表里数} \times \frac{\text{朔实}}{\text{朔日法} \times \text{交率}} \\ &= \text{经朔日入平会日} + \text{余} \frac{\text{秒}}{\text{交率}} / \text{朔日法}\end{aligned}$$

在得出月平入交、日平入会日辰后，皇极历首倡进行日月盈缩迟疾运动的修正，得入交、入会常日、定日。求经朔望入交常日、定朔望入交定日的方法是：

以月入气朔望平会日迟速定数，速加迟减其平入交日余，为经交常日及余。

以交率乘定朒朒，交数而一，所得以朒减朒加常日余，即定朔望所入定日及余。其去交如望差以下、交限以上者月食。月在里者日食。即：

$$\text{入交常日余} = \text{平入交日、余} \pm \text{迟速定数}$$

$$\text{入交定日、余} = \text{入交常日、余} \pm \text{交率} \times \text{朒朒定数} / \text{交数}$$

速加、迟减，朒减、朒加。望差、交限为白道食限。定朔望所入定日及余，去交若在望差以下，交限以上者月食；朔时日月同度，在上述食限内，月在日道里者则有日食。

求入会常日方法为：

以交数乘月入气朔望所平会日迟速定数，交率而一，以速加、迟减其入平会日余，即所入常日余。亦以定朒朒，而朒减、朒加其常日余，即日定朔望所入会日及余，皆满会日去之。其朔望去会，如望以下、会限以上者，亦月食；月在日道里则日食。

$$\text{入会常日、余} = \text{入平会日、余} \pm \frac{\text{交数} \times \text{迟速定数}}{\text{交率}}$$

入会定日、余=入会常日、余±朏朒定数

速加、迟减，朏减、朒加。望（半朔望月）、会限为皇极历给出的黄道食限。当定朔望去会小于望数、大于会限时月有月食；若月在日道里，日食。

步五星：

岁为木，木数 18605468

伏半平 836848

复日 398，余 41156

岁 1，残日 33，余 29749.5

见去日 14 度

荧惑为火，火数 36377595

伏半平 3379327.5

复日 779，余 41919

岁再，残日 49，余 19106

见去日 16 度

镇为土，太白为金，辰为水（略）

各星复日=星数/气日法

木星复日=18605468/46644

$$=398 \frac{41156}{46644} = 398.88234$$

火星复日=36377579/46644

$$=779 \frac{41919}{46644} = 779.8987$$

残日=复日-岁实

=（星数-岁数）/气日法

木星残日=(18605468-17036466.5)/46644

$$=33 \frac{29749.5}{46644} = 33.6378$$

$$\begin{aligned}\text{火星残日} &= 779 \frac{41919}{46644} - 2 \times 365 \frac{11406.5}{46644} \\ &= 49 \frac{19106}{46644}\end{aligned}$$

火星,因会合周期(复数)较长,残日是复数内减两岁实的余数,故作“岁再”。

日星同经,是为合日。合日前后各有一段时间星光为日所掩,看不见,称合前伏和合后伏。合伏后五星始见时日星相距度数,为“见去日”。皇极历以上元时刻为日星相合。在推算星平见术时,需将起算点推至晨始见的时刻,为此需减去半伏日,这就是“伏半平”的数值。以度法(气日法)除“伏半平”即得各星伏半平的度数。对木、土、水星,它与“见去日”相差不大。对火星、金星有很大的差异。因为火星轨道偏心率较大,盈缩运行起伏很大。平见实见有较大差别,不易确定。

皇极历步五星术有平见、常见、定见的区别。经过行星盈缩改正的星见时刻为常见,定见为对常见日再进行太阳不均匀运动修正后的时刻。求常见日、定见日的方法是:

以转法除所得加減者(行星盈缩改正),为日,其不满,以余通乘之,为余;并日,皆加減平见日、余,即为常见日及余。

以其先后已通者(太阳改正),先减后加常见日,即得定见日、余。

常见日 = 星平见日 ± 行星改正

定见日 = 常见日 ± 太阳改正

太阳改正先后数,先减、后加。

## 二、皇极历日躔表及日行盈缩的计算

刘焯皇极历中创立了二次差内插算法,并用它计算太阳位置、定气定期时刻、日月交食、五星定见位置。开创了历法计算的

新局面。

皇极历日躔表给出了十二个月二十四气每一气内太阳实行的四项基本数值：躔衰、衰总、陟降率和迟速数。表中为了不出现小数或分数，躔衰、陟降率等数值都各乘了一个常数因子。

躔衰：(太阳实行度－平行度)×日千元 52。自冬至到春分，日实行速大于平行速，躔衰为增为正；春分到夏至，实行小于平行，为损为负；夏至到冬至正好相反，表中增为负，损为正。

衰总：其前各气躔衰数的累积值，是冬至到该气交节时太阳实行度与平行度之差的累加累减值与日千元的乘积。冬至、夏至平气即为定气，是日行盈缩的起点。先端、后端其值为 0。如实行在平行前称先，实行慢于平行而后。

陟降率：本气内太阳实行度、平行度之差，乘朔日法，积与月日平行度之比。即：

$$\begin{aligned}\text{陟降率} &= \frac{(\text{太阳实行度} - \text{平行度})}{\text{月日平行度}} \times \text{朔日法} \\ &= \frac{\text{躔衰} / \text{日千元}}{(\text{岁率} + \text{月率}) / \text{岁率}} \times \text{朔日法} \\ &= \frac{\text{躔衰} \times \text{岁率} \times \text{朔日法}}{\text{日千元} \times (\text{岁率} + \text{月率})}\end{aligned}$$

陟降与躔衰增损同义同号。

迟速数：其前各气陟降率的累积值。日行盈缩积累的结果，冬至到夏至半年，日实行总在平行之前，故为速；夏至到冬至半年，太阳的实际位置总在平行之后，故为迟。冬至夏至为迟速的起点，迟速为 0，称迟本、速本。

日躔表给出二十四节气时太阳实际行度。要计算一年中任一时刻的太阳位置和盈缩改正，需用内插法。大业历使用线性内插法。刘焯皇极历创立了等间距二次差内插算法，提高了精度。

皇极历给出盈泛为 16，亏总是 17，日限 11。“秋分后春分前

为盈泛，春分后秋分前为亏总。须取其数，泛总为名，指用其时。春分为主，亏日分后，盈日分前”。即秋分后至春分，太阳走盈历，春分后秋分前，太阳走缩历。泛总是亏总、盈泛的合称。以  $T$  表示所求的迟速数， $\Delta_1$ 、 $\Delta_2$  为所在的气、后一气陟降率， $L$  为气的长度。则：

$$\text{秋分后春分前气长 } L = \frac{\text{盈泛}}{\text{日限}} = \frac{16 \times 10}{11} = 14.55$$

$$\text{春分后秋分前气长 } L = \frac{\text{亏总}}{\text{日限}} = \frac{17 \times 10}{11} = 15.45$$

皇极历定义：

$$\text{气末率} = \frac{\Delta_1 \times \Delta_2}{2} \times \frac{\text{日限}}{\text{泛总}} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L}$$

$$\text{总差} = (\Delta_1 - \Delta_2) \times \text{日限} / \text{泛总} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{L}$$

$$\text{别差} = \text{总差} \times \frac{\text{日限}}{\text{泛总}} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{L} \cdot \frac{1}{L} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{L^2}$$

“前少”指陟降率前小后大，即  $\Delta_1 < \Delta_2$ ；“前多”为前大后小，即  $\Delta_1 > \Delta_2$ 。

前少时初率 = 末率 - 总差

$$= \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} - \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{L} \quad (\Delta_1 < \Delta_2)$$

前多时初率 = 末率 + 总差

$$= \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{L} \quad (\Delta_1 > \Delta_2)$$

初日陟降数 = 初率 +  $\frac{1}{2}$  别差

$$= \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} - \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{L} - \frac{1}{2} \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{L^2}$$

$$= \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} - \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{L} + \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2L^2}$$



(前少,  $\Delta_1 < \Delta_2$ )初日陟降数 = 初率 -  $\frac{1}{2}$  别差

$$= \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{L} - \frac{1}{2} \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{L^2}$$

(前多,  $\Delta_1 > \Delta_2$ )

以别差前多者日减、前少者日加初数, 得每日陟降数  $\delta$ 。以前多为例, 有:

$$\delta_t = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{L} - \frac{2t-1}{2L^2} (\Delta_1 - \Delta_2)$$

(t=1, 2, ..., L)

迟速数为陟降数的累积值, 由术文得:

$$T_t = \delta_1 + \dots + \delta_t$$

$$= t \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} + t \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{L} - \frac{t^2}{2L^2} (\Delta_1 - \Delta_2)$$

673

当  $t=L$  时,  $\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_L = \Delta_1$ 。因此  $t$  日的迟速数  $T(nL+t)$  为:

$$\begin{aligned} T(nL+t) &= T(nL) + \frac{t}{2L} (\Delta_1 + \Delta_2) \\ &\quad + \frac{t}{L} (\Delta_1 - \Delta_2) - \frac{t^2}{2L^2} (\Delta_1 - \Delta_2) \end{aligned}$$

其中  $n=0, 1, \dots, 11$ , 为二分间的节气数;  $t=1, 2, \dots, L$ , 气间的日数。此为刘焯二次差内插公式, 与牛顿等间距二次插值公式形式相同。

在由前多转为前少, 前少变为前多的过渡气段, 计算要做另外处理。

求某气  $t$  日的陟降、迟速数方法概述如下:

$$\text{气末率} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L}$$

$$\text{总差} = \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{L}$$

$$\text{别差} = \frac{1}{L} \times \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{L} = \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{L^2}$$

判断前多、前少： $\Delta_1 < \Delta_2$  前少， $\Delta_1 > \Delta_2$  前多。

(甲) 前多  $\Delta_1 > \Delta_2$ ,  $\Delta_1 - \Delta_2 > 0$  情况下：

$$\text{初率} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} + \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{L}$$

$$\text{初日陟降数} = \text{初率} - \frac{1}{2} \text{别差}$$

$$= \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} + \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{L} - \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{2L^2}$$

$$\text{每日陟降数 } \delta_i = \text{初日陟降数} - (i-1) \times \text{别差}$$

$$= \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} + \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{L} - \frac{2i-1}{2L^2} |\Delta_1 - \Delta_2|$$

(乙) 前少  $\Delta_1 < \Delta_2$ ,  $\Delta_1 - \Delta_2 < 0$  情况下：

$$\text{初率} = \text{气末率} - \text{总差} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} - \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{L}$$

$$\text{初日陟降数} = \text{初率} + \frac{1}{2} \text{别差}$$

$$= \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} - \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{L} + \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2L^2}$$

$$\text{每日陟降数 } \delta_i = \text{初日陟降数} + (i-1) \times \text{别差}$$

$$= \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} - \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{L} + \frac{(2i-1)|\Delta_1 - \Delta_2|}{2L^2}$$

$$t \text{ 日陟降数} = \sum_1^t \delta_i$$

$$= \begin{cases} t \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} + t \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{L} - \frac{t^2}{2L^2} (\Delta_1 - \Delta_2) & (\Delta_1 > \Delta_2) \\ t \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} - t \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{L} + \frac{t^2}{2L^2} (\Delta_2 - \Delta_1) & (\Delta_2 > \Delta_1) \end{cases}$$

$$t \text{ 日迟速数 } T(nL+t) = T(nL) + \sum_1^t \delta i$$

陟加、降减。

为求合朔时的太阳盈缩改正,先将平朔小余化为辰,以气小余化辰减之,再以日限乘日数,得入限。即经朔(弦望同)与其前气之时距。

为求太阳改正,仍分前多( $\Delta_1 > \Delta_2$ )、前少( $\Delta_1 < \Delta_2$ )两种情况来分析。

(甲)前多时:

$$\text{总率} = \text{入限} \times \text{其气前多之末率} / \text{日限}$$

$$\text{入差} = (\text{泛总} - \text{入限}) \times \text{总差} / \text{泛总}$$

$$\text{总数} = \text{总率} + \text{入限} \times (\text{总差} + \text{入差}) / (2 \times \text{日限})$$

(乙)前少时:

$$\text{总率} = \text{入限} \times \text{其气前少之初率} / \text{日限}$$

$$\text{总数} = \text{总率} + \text{入限}^2 \times \text{别差} / (2 \times \text{日限}^2)$$

末率、初率、总差、别差意义同前,泛总是盈泛、亏总合称,春分后的节气用亏总 17,春分前用盈泛 16。

令  $t = \text{入限} / \text{日限}$ , 为气辰(经朔弦望)距。代入各值得:

(甲)前多时:

$$\text{总率} = t \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L}$$

$$\text{入差} = \left(1 - \frac{\text{入限}}{\text{泛总}}\right) \times \text{总差}$$

$$= \left(1 - \frac{\text{入限} / \text{日限}}{\text{泛总} / \text{日限}}\right) \times \text{总差}$$

$$= \left(1 - \frac{t}{L}\right) \times \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{L}$$

$$\text{总数} = t \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} + \frac{t(\Delta_1 - \Delta_2)}{L} - \frac{t^2}{2L^2} (\Delta_1 - \Delta_2)$$

(乙)前少时:

$$\text{总率} = t \left( \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} - \frac{|\Delta_1 - \Delta_2|}{L} \right)$$

$$\text{总数} = t \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} - \frac{t(\Delta_2 - \Delta_1)}{L} + \frac{t^2}{2L^2}(\Delta_2 - \Delta_1)$$

可以看出,前多、前少的总数值与前面推每日迟速术中得出的  $t$  日陟降数是完全一致的。即,对于计算太阳盈缩改正,  $t$  是整日或非整数日方法、公式是同一的。

(甲)前多:

$$\text{总数} = \frac{t}{L} \Delta_1 - \frac{t}{2L} \left( \frac{t}{L} - 1 \right) (\Delta_1 - \Delta_2)$$

(乙)前少:

$$\text{总数} = \frac{t}{L} \Delta_1 + \frac{t}{2L} \left( \frac{t}{L} - 1 \right) (\Delta_2 - \Delta_1)$$

前多、前少总数公式可规范为同一形式:

$$\text{总数} = \frac{t}{L} \Delta_1 + \frac{t}{2L} \left( \frac{t}{L} - 1 \right) (\Delta_2 - \Delta_1)$$

陟加、降减其气迟速数  $T(nL)$  即得计算定朔弦望、太阳迟速改正数:

$$T(nL+t) = T(nL) \pm \frac{t}{L} \Delta_1 + \frac{t}{2L} \left( \frac{t}{L} - 1 \right) (\Delta_2 - \Delta_1)$$

此即牛顿二次差内插公式。

皇极历首用定气。日躔表中陟降率、迟速数用以计算定弦朔望的太阳改正。计算定气主要考虑太阳的盈缩、太阳实行与平行的差度。日躔表“躔衰”,为本气内太阳实行度、平行度之差与日干元的乘积,“衰总”反映冬至到该气交节时太阳实行度与平行度之差的累计值。计算定气的方法,先“求每日所入先后”,即太阳的实行位置;次“求定气”日及余。定气、恒气是以日长及气日法(46644)分来表示的。要计算平气的改正,也要以日或日分入算。

而日躔表的躔衰、衰总各为日实行的、平行度之差与日干元的乘积。日干元 52 与余通 897 的乘积等于气日法。所以先以余通 897 乘躔衰、衰总,使之各化为气日法的日分。而后将躔衰视如陟降率,衰总看作迟速数,如同求每日迟速数同样的方法,即得每日所入先后数及定数。

采用“推每日迟速数术”的方法和算式,取  $\Delta_1$ 、 $\Delta_2$  为所在气及后气的躔衰,得:

每日所入先后数

$$= \frac{t}{2L}(\Delta_1 + \Delta_2) \pm \frac{t}{L}|\Delta_1 - \Delta_2| \mp \frac{t^2}{2L^2}|\Delta_1 - \Delta_2|$$

前多( $\Delta_1 > \Delta_2$ )取上号,前少( $\Delta_1 < \Delta_2$ )取下号。即与前述  $t$  日陟降数或前多、前少总数具有同样的形式。但此处  $\Delta_1$ 、 $\Delta_2$  为躔衰值。

$$t \text{ 日所入先后定数 } T(nL+t) = T(nL) \pm \sum_1^t \delta_i$$

增加、损减。

将得出的每日所入先后数视作气余,将所计算历日的先后数化作日,后减、先加其日,所得满一恒气,即得二至后一定气之数。这需要反复调整所计算的历日,使所得适满一恒气,此历日即为定气之数。如法由此可算得次一定气。

$$\text{皇极历岁实 } 365 \frac{11406}{46644} \frac{1}{2}, \text{ 每气长 } 15 \frac{10192}{46644} \frac{37}{48} \text{ 日, 冬夏二至}$$

为日行盈缩始点,恒气即为定气。日躔表给出每气的躔衰和先后数,以先后数先减、后加其恒气,得次气交气定日及小余。如小寒

$$\text{定气日、余} = 15 \frac{10192}{46644} \frac{37}{48} - \frac{28 \times 897}{52 \times 897} = 14 \frac{31720}{46644} \frac{37}{48} = 14.68。$$

以加天正冬至大小余,命以甲子算外,得小寒定气干支及小

余。各气衰总为其前各气躔衰的累积值。求小寒定气用小寒条下,求立春定气用立春气下衰总(先后数)。

这是皇极历计算定气的又一方法。由此,可计算一年中任一天(入某气 $t$ 日)太阳距冬至或夏至的实际位置:

$$F(t) = nL + t \pm T(nL + t) / \text{日干元 } 52$$

先减,后加。 $n$ 入气数 $=0, 1, \dots, 11$ ;  $t$ 入 $n$ 气日数 $=(1, 2, \dots, L)$ 。

皇极历在日躔二十四气、七十二候表中给出了夜半漏和昏旦中星度分及刻数。是基于实测得出的。并给出求日出入辰刻的计算方法:

$$\text{夜刻} = 2 \times \text{夜半漏}$$

$$\text{昼刻} = 100 - \text{夜刻}$$

$$\text{昼间日见刻} = \text{昼刻} - 5$$

$$\text{夜日不见刻} = \text{夜刻} + 5$$

$$\text{辰刻数} = \text{百刻} / 12$$

$$\text{日出实刻数} = \text{半辰} + \text{不见刻} / 2$$

$$\text{日入实刻数} = \text{日出实} + \text{日出见刻}$$

日出实、日入实皆以辰刻度除之,命子算外,即日出、日入所在辰。不满辰,为刻为分。

皇极历首倡用等差级数求和法求每日夜漏。

### 三、月离表及月行迟疾改正

皇极历称近点月为转终日。月离表给出从近地点开始转终内每入转日月实行的四项基本数据。

$$\text{速分: 月日实行分} = \text{转法 } 52 \times \text{月日实行度}$$

$$\text{速差: 本日月行分} - \text{次日月行分}$$

本日行分大于次日,称“消”;小于次日,记作“息”。

$$\begin{aligned}
 \text{月日平行度} &= \text{小周/岁率} \\
 &= (\text{岁率} + \text{月率}) / \text{岁率} \\
 &= (676 + 8361) / 676 \\
 &= 9037 / 676 = 13 \frac{249}{676} \\
 &= 13 \frac{19}{52} \frac{2}{13}
 \end{aligned}$$

用转法通为分,得

$$\text{月日平行分} = 13 \frac{19}{52} \frac{2}{13} \times 52 = 695 \frac{2}{13} = 695.15385$$

加减数(限):

$$\begin{aligned}
 &\frac{\text{月每日实行分} - \text{平行分}}{\text{平行分}} \times \frac{\text{朔日法}}{\text{终法}} \times \text{朔日法} \\
 &= \frac{\text{速分} - \text{平行分}}{\text{平行分}} \times \frac{1242}{2263} \times 1242 \\
 &= \frac{13 \times \text{速分} - 9037}{9037} \times \frac{1242}{2263} \times 1242
 \end{aligned}$$

679

近地点到远地点半转周,实行大于平行,其数为加;小于平行,为减。远地点到近地点半周,反之,实行小于平行为加,大于平行为减。

求每日速分(实行分)与平行分之差,其值与加减数相近,相差一个近于1的因子。此栏实际与其前诸历损益率相当。有人误会为月实平行差。

朏脑值:月离表加减栏数值是以朔日法系统表示的。皇极历定朔计算中的月亮、太阳改正皆用终法系统。为此需先将加减分数值乘以终法/朔日法(即 $\frac{2263}{1242}$ )化为终法分。朏脑积即其前各日化为终法分的加减数的累积值。

$$t \text{ 日朒朒积} = \sum_1^{t-1} \text{加减数} \times \text{终法} / \text{朔日法}$$

$$\text{加减数} = [(\text{速分} - \text{平行分}) / \text{平行分}] \times \frac{\text{朔日法}^2}{\text{终法}}$$

所以

$$\begin{aligned} t \text{ 日朒朒值} &= \sum_1^{t-1} [(\text{实行分} - \text{平行分}) / \text{平行分}] \\ &\quad \times \frac{\text{朔日法}}{\text{终法}} \times \text{朔日法} \times \frac{\text{终法}}{\text{朔日法}} \\ &= \sum_1^{t-1} [(\text{实行分} - \text{平行分}) / \text{平行分}] \times \text{朔日法} \\ &= \sum_1^{t-1} \left[ \left( \text{速分} - 695 \frac{2}{13} \right) / 695 \frac{2}{13} \right] \times 1242 \\ &= \sum_1^{t-1} [(13 \times \text{速分} - 9037) / 9037] \times 1242 \end{aligned}$$

680

近地点到远地点半转周，月亮实际位置在平行之前。月在近地点时运行最快，在 1/4 周时达到平行速度，以后变慢，但积盈之度直到远地点消耗殆尽。这半周称作朒。月在远地点速度最慢，实月开始落后于平月，在 3/4 周时月行又达到平行速度，后日益加快，但积缩之度直至近地点始得补齐。在这半周，称月为朒。

近点月中，近地点月速最快，远地点最慢，1/4、3/4 周时月速等于平行。这四点皆为速度转折之点。在月离表加减栏中，数值当由加变减，或由减变加处。皇极历对这 4 点所在之日采取了分段处理的办法，为其后历法效法。

知道了月亮每日的实行度以及实行与平行之差，就可以推求任一时刻的月亮实际位置以及定朔弦望的时日。

前面介绍了由平朔弦望与其前节气之间的时距，推求月朔弦望应平会日所入迟速，即太阳改正的方法。将所得迟速定数，加入朔弦望经辰时分，即得经太阳迟速改正后的朔弦望时刻。这一



步皇极历称作“求月平应会日所入”。术中“变从转余”是将迟速定数,像朔弦望经辰小余一样,亦由朔日法改为终法系统。即将以朔日法 1242 为分母表示的余数,变成以终法(2263)为分母表示(分母由 1242 换成 2263 后,只需将分子乘  $\frac{2263}{1242}$  即可)。这样做了以后,得出:

$$\begin{aligned} & \text{平会所入日、余} \\ &= \text{经辰所入余士月朔弦望会日所入迟速定数} \\ & \quad \quad \quad (\text{速加、迟减}) \end{aligned}$$

求朔望弦月亮改正的方法为“推朔弦望定日”术。以  $\Delta_1$  表示平会所入日加减限(月离表中之加减数),  $\Delta_2$  为次日加减限,即后限。入余是平会所入不足一日的分数。计算月亮改正根据入转日、分,以终法为日分,即 1 日 2263 分。令  $t = \text{入余}/\text{终法}$ , 不足 1 日的奇零表示成日的分数或小数。据术文:

$$\text{通率} = (\Delta_1 + \Delta_2) / 2$$

$$\text{限衰} = |\Delta_1 - \Delta_2|$$

(甲)前多( $\Delta_1 > \Delta_2$ )时:

$$\begin{aligned} \text{限数} &= \left\{ \text{通率} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{终法} - \text{入余}}{\text{终法}} \times \text{限衰} + \text{限衰} \right] \right\} \times \frac{\text{入余}}{\text{终法}} \\ &= t \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + \frac{t}{2} (1-t) (\Delta_1 - \Delta_2) + t \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} \end{aligned}$$

(乙)前少( $\Delta_1 < \Delta_2$ )时:

$$\begin{aligned} \text{限数} &= \left[ \text{通率} + \frac{1}{2} \frac{\text{入余}}{\text{终法}} \times \text{限衰} - \text{限衰} \right] \times \frac{\text{入余}}{\text{终法}} \\ &= t \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} - \frac{t}{2} (1-t) (\Delta_2 - \Delta_1) - t \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2} \end{aligned}$$

前多限数、前少限数算式与前面介绍日躔改正得出的前多总数、前少总数算式相同。仅限数算式中相应的  $L=1$  而已。同样,此二式也可合成一式。即:

$$\text{平会加减限数} = t\Delta_1 + \frac{t}{2}(t-1)(\Delta_2 - \Delta_1)$$

$$= \frac{t}{2}(\Delta_1 + \Delta_2) \pm t|\Delta_1 - \Delta_1| \mp \frac{t^2}{2}|\Delta_1 - \Delta_2|$$

前多( $\Delta_1 > \Delta_2$ )取上号,前少( $\Delta_1 < \Delta_2$ )取下号。

由几何图形可看出,平会加减限数算式是按直线梯形计算入余(不足1日的奇零部分)得出的。这可视作一级近似式。为提高精度,皇极历又给出进一步修正的方法,即求限数的改正量。这一步皇极历术文前两句含义不明,学者有不同理解。“其限数又别从转余为变余,朏减朒加本人余。”纪志刚先生解释为,“限数”,即第一层次求得相应于“入余”的改变量,要以此作为时间的自变量,故须化为以“统法”为分母,这一分母的转换称作“别从转余为变余”。即限数化作变余。

变余“朏减朒加本人余”,组成了新的自变量“入余±变余”(朏减、朒加)。精密的月亮改正应以“入余±变余”来求得。为此皇极历先求“变余”的改正量,积作限变值。

“限前多者,朏以减与未减,朒以加与未加,皆减终法”。因前文有“(变余)朏减朒加本人余”,故此处是指朏的情况下,减去变余的入余与未减变余的入余,皆减终法;朒的情况下,加上变余的入余及未加变余的入余,也皆减终法。

令  $t_0 = \text{变余}/\text{终法}$ 。这样,据术文,限前多( $\Delta_1 > \Delta_2$ )者,限变值分朏朒两种情况,有:

$$\begin{aligned} \text{朏限变值} &= \left\{ \text{通率} + \frac{1}{2} [(\text{终法} - \text{入余}) + \text{终法} \right. \\ &\quad \left. - (\text{入余} - \text{变余}) \right] \frac{\text{限衰}}{\text{终法}} \left\} \times \frac{\text{变余}}{\text{终法}} \\ &= \left\{ \text{通率} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{终法} - \text{入余}}{\text{终法}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\text{终法} - \text{入余}}{\text{终法}} + \frac{\text{变余}}{\text{终法}} \right] \frac{\text{限衰}}{\text{终法}} \right\} \times \frac{\text{变余}}{\text{终法}} \end{aligned}$$

$$= t_0 \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + t_0(1-t)(\Delta_1 - \Delta_2) \\ + \frac{t_0^2}{2}(\Delta_1 - \Delta_2)$$

$$\begin{aligned} \text{朏限变值} &= \left\{ \text{通率} + \frac{1}{2} [(\text{终法} - \text{入余}) + \text{终法} \right. \\ &\quad \left. - (\text{入余} + \text{变余})] \frac{\text{限衰}}{\text{终法}} \right\} \times \frac{\text{变余}}{\text{终法}} \\ &= \left\{ \text{通率} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{终法} - \text{入余}}{\text{终法}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{\text{终法} - \text{入余}}{\text{终法}} - \frac{\text{变余}}{\text{终法}} \right] \frac{\text{限衰}}{\text{终法}} \right\} \times \frac{\text{变余}}{\text{终法}} \\ &= t_0 \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + t_0(1-t)(\Delta_1 - \Delta_2) \\ &\quad - \frac{t_0^2}{2}(\Delta_1 - \Delta_2) \end{aligned}$$

得出限变值以后,“所得以朏减、朏加限数,加减朏朏积而定朏朏”,即月亮改正。

定朏朏(月亮改正) = 朏朏积 ± 限数 ± 限变值

朏减、朏加。朏时限数修正为“限数 - 限变值”,朏时修正为“限数 + 限变值”。

朏朏限变值,可统一变形为:

$$\begin{aligned} \text{限变值} &= t_0 \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + t_0 \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2}(t_0 - 2tt_0 \pm t_0^2)(\Delta_1 - \Delta_2) \end{aligned}$$

符号朏加、朏减。

$$\text{限数} = t \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + t \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2} + \frac{t}{2}(1-t)(\Delta_1 - \Delta_2)$$

朏时,

$$\begin{aligned}\text{限数}-\text{限变值} &= (t-t_0) \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} + (t-t_0) \frac{\Delta_1-\Delta_2}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2}(t-t_0)[1-(t-t_0)](\Delta_1-\Delta_2)\end{aligned}$$

朏时,

$$\begin{aligned}\text{限数}+\text{限变值} &= (t+t_0) \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} + (t+t_0) \frac{\Delta_1-\Delta_2}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2}(t+t_0)[1-(t+t_0)](\Delta_1-\Delta_2)\end{aligned}$$

同理, 前少( $\Delta_1 < \Delta_2$ )时,

$$\text{朏限变值} = t_0 \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} - t_0(\Delta_1-\Delta_2) + (t_0 t - \frac{t_0^2}{2})(\Delta_1-\Delta_2)$$

$$\text{朏限变值} = t_0 \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} - t_0(\Delta_1-\Delta_2) + \left(t_0 t + \frac{t_0^2}{2}\right)(\Delta_1-\Delta_2)$$

朏时,

$$\begin{aligned}\text{限数}-\text{限变值} \\ = (t-t_0) \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} - (t-t_0)(\Delta_2-\Delta_1) + \frac{(t-t_0)^2}{2}(\Delta_2-\Delta_1)\end{aligned}$$

朏时,

$$\begin{aligned}\text{限数}+\text{限变值} \\ = (t+t_0) \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} - (t+t_0)(\Delta_2-\Delta_1) + \frac{(t+t_0)^2}{2}(\Delta_2-\Delta_1)\end{aligned}$$

令  $T = t \pm t_0$  (朏-, 朏+), 则上列前多、前少时的限数 $\pm$ 限变值(朏减、朏加)四式, 可统一为:

$$\text{限数} \pm \text{限变值} = T\Delta_1 + \frac{1}{2}T(T-1)(\Delta_2-\Delta_1)$$

由此看出, 二次近似算式形式上与一次近似相同, 仅自变量由  $t\left(\frac{\text{入余}}{\text{终数}}\right)$  改变为  $T\left(\frac{\text{入余} \pm \text{变余}}{\text{终数}} = t \pm t_0\right)$  而已。

月亮改正(定朏朏) = 朏朏积 $\pm$ 限数 $\pm$ 限变值

即

$$\text{月亮改正 } S(n+T)=S(n)\pm\left[T\Delta_1+\frac{1}{2}T(T-1)(\Delta_2-\Delta_1)\right]$$

朓减、朒加。这样,经日月改正,即可得出定朔弦望时刻。

朔弦望定日、余=经辰所入余(平朔望弦时刻)

±太阳迟速改正±月亮朓朒改正

迟减,速加;朓减,朒加。

皇极历创立的定朔推步方法,首先为麟德历沿用。唐代诸历算法基本相同而有所发展。由上面讨论看出,推算方法是非常复杂的。实际上,唐初戊寅历以前,历书上只用平朔注历,定朔望的计算是为预报日月食使用的。戊寅历、麟德历开始,历书以定朔注记。但通常历书定朔的计算,太阳、月亮运动改正俱简化采用线性内插得出。在对太阳、月亮运动的认识还不充分的时候,日躔表、月离表反映的日月实际运动误差很大。基本数据不准确,仅从计算方法上来改进,往往是事倍功半的。

## 第四节 初唐戊寅元历及月食步法

### 一、戊寅元历的颁行及校订

隋大业十三年(617),太原留守李渊起兵西进,渡河入长安。大业十四年(618)戊寅三月,隋将宇文化及等杀炀帝。五月,李渊迫隋恭帝禅位,建立唐朝,改元武德。东都(洛阳)道士傅仁均言戊寅岁时正得上元之首,宜定新历,以符禅代。由是造戊寅历。所陈七事称:①唐以戊寅岁甲子日登极,历元戊寅,日起甲子,如汉太初;②冬至五十余年辄差1度,日短星昴,合于尧典;③周幽王六年十月辛卯朔,入食限,合于诗;④鲁僖公五年壬子冬至,合春秋命历序;⑤月有三大三小,则日食常在朔,月食常在望;⑥命

辰起子半，命度起虚6度，符阴阳之始；⑦立迟疾定朔，则月行晦不东见，朔不西眺。

戊寅岁前冬至大业历适逢癸亥午时冬至，真实天象当癸亥日晚。傅仁均选戊寅岁作历元，日起天正冬至甲子，与天相近。但至朔并不相齐起于夜半。冬至月龄十五日许，当天正月半。并不似汉太初改历，甲子至朔同日起于夜半。所陈最主要的内容是傅仁均强调采用定朔，称如此则日食常在朔、月食总在望，月行晦不东见，朔不西眺。

高祖诏司历起二年(619)用之。戊寅历是中国第一部用定朔的历法。

三年(620)，按戊寅历正月望及二月、八月朔当食，经校验不效。实际上正月望(2月23日)、二月朔(3月10日)、八月朔(9月2日)皆入食限。正月望为小食分半影月食，目视不可见。二月朔巳时日环食、八月朔未时日全食都发生在低纬度或赤道附近，中国见不到而已。说来也巧，预报的这三次交食发生在同一年，恰恰都不可见。因此造成了戊寅历预推日月食不能符合天文实际的印象。笔者认为，7世纪初傅仁均能推出这样的交食已属不易，是时尚无计算各地不同见食情况的方法。

由于交食不效，高祖诏吏部郎中祖孝孙考其得失。孝孙使算历博士王孝通诘难傅仁均。孝通不明岁差之理。诘问说，若是尧时仲冬星昴昏中，至月令已差至东壁，那么尧前七千余年，按此当冬至昏翼中，日应在东井了。井(夏至日所在)极北，去人最近，故暑。斗极南(斗，冬至日所在)，去人最远，故寒。按这种说法，不是寒暑易位了吗？此外，他还反对用定朔。认为这样虽然朔日正当合会，但月长没有规律，失去了历法推步纪元纪首三端齐同的条件。傅仁均答辩称，孝通未晓岁差，把南斗视作冬至常星，才会有寒暑易位的说法。古人用平朔，故秦汉以来，多非朔食。为纪

其日数之元，三端不可死拘。冬至自有常数，朔名由于月起，月行有迟有速，三端安得即合。只要日月相合，至朔同日即为合朔冬至。孝孙认为仁均有道理。

九年(626)，复诏大理卿崔善为与王孝通等校订。善为改动了几十条。其中最重要的改动复行上元积年。傅仁均本术以武德元年为历始，而气朔迟疾、交会及五星皆给出武德元年的测算数据，称为加减差。有些类似授时历的气闰转交周合历等七应。定期和不用上元积年，是戊寅历的两大发展。

贞观初，直太史李淳风又上疏论历十八事。复诏崔善为考校二家得失。其七条改从淳风。十四年(640)太宗将亲祀南郊。历以十一月癸亥朔，甲子冬至。而淳风新术为甲子合朔冬至。乃上言，古历分日起于子半。十一月当甲子合朔冬至，傅仁均以减余稍多，子初为朔，遂差三刻。又以平朔推之，二历皆以朔日冬至。因平朔自古行之，虽癸亥日月相及，明日甲子，仍可为朔。司历南宫子明、太史令薛颐、国子祭酒孔颖达皆请从淳风，从之。十九年九月后四朔频大。于是下诏改用仁均平朔，迄麟德元年(664)。

戊寅历关于日行盈缩、月行迟疾及定期的算法与大业历原则相同。而采用定朔基本参照刘孝孙、刘焯的主张。《新唐书·历志》和《旧唐书·历志》均有著录，内容详略不一，但大致相同，皆为武德九年崔善为所校改的历经。傅仁均本术无传。《旧唐书》为后晋刘昫领衔修撰，成书于开运二年(945)。《新唐书》为宋祁、欧阳修撰修。历志由欧阳修、刘义叟撰写。成书于嘉祐五年(1060)。晚于《旧唐书》百余年。《旧唐书·历志》戊寅历记载有残缺，仅存五星、交会两部分，但较《新唐书·历志》详尽。错字较多，保留了一些崔善为等校改的痕迹。

旧志“推交分术”文中，有下列一段话：置入上元已来积月，以交会法去之，余以朔差乘之，满交会法，又去之(仁均本术，武德年

加交差 7755164 分)。余为所求年天正朔入平交分。

这其中保存了傅仁均本术以武德元年为元,其交会的加減差是 7755164 分。我们来校算一下,看看崔善为的较定本除复用上元积年外,有没有改动傅仁均本术的数据。

《新唐书》给出戊寅历上元戊寅岁至武德九年丙戌,积 164348 算外(《旧唐书》“戊寅历经”前面部分缺失)。于是得上元至武德元年积 164340 算外。

由术文有:

$$\begin{aligned}\text{武德元年积月} &= \text{Int}[\text{章月} \times \text{积年} / \text{章岁}] \\ &= 2032613\end{aligned}$$

$$\text{朔差} = 1085494.2, \text{交会法} = 12741205.8$$

$$\text{武德元年天正朔入交数} = [\text{积月} \times \text{朔差} / \text{交会法}]_R$$

$$\text{积月} \times \text{朔差} = 2206389622345$$

$$\text{积月} \times \text{朔差} / \text{交会法} = 173169 \frac{7755164.8}{12741205.8}$$

得武德元年天正经朔入交数 = 7755164.8 分。与术文保存的“仁均本术,武德年加交差 7755164 分”完全一致。可证崔善为等所改数十条,并未变动仁均本术的法数。7755164.8 分相当于武德元年天正经朔距交 16.56322 日 [= 7755164.8 / (36 × 13006)]。

## 二、戊寅历法数

戊寅历上元戊寅岁至武德九年(626)丙戌,积 164348,算外。

章岁 676

章闰 249

章月 8361

月法 384075

日法 13006

时法 6503 (= 日法 / 2)



度法(气法)9464

气时法 1183(=气法/8)

岁分 3456675

岁余 2315(岁实 365 日的余分)

周分 3456845.5

斗分 2485.5(周天 365 度的余分)

没分 76815

没法 1103

历日 27

历余 16064

历周 798200

历法 28968

余数 49635(=岁分-360×气法)

$$\begin{aligned}\text{岁实} &= \text{岁分} / \text{气法} = \frac{3456675}{9464} \\ &= 365 \frac{2315}{9464} = 365.24461116\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{朔实} &= \text{月法} / \text{日法} = \frac{384075}{13006} \\ &= 29 \frac{6901}{13006} = 29.53060126\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{周天} &= \text{周分} / \text{度法} = \frac{3456845.5}{9464} \\ &= 365 \frac{2485.5}{9464} = 365.2626268\end{aligned}$$

岁差分=周分-岁分=170.5

$$\text{没日距} = \frac{\text{没分}}{\text{没法}} = \frac{\text{岁分}}{\text{余数}} = 69 \frac{708}{9464}$$

$$\text{历周日} = \text{历周} / \text{历法} = 27 \frac{16064}{28968}$$

$$=27.55454294$$

$$\text{月每日平行分} = \text{月每日平行度} \times \text{章岁}$$

$$= \text{章月} + \text{章岁}$$

$$= 8361 + 676 = 9037$$

$$\text{月每日平行度} = (\text{章月} + \text{章岁}) / \text{章岁} = \frac{9037}{676}$$

戊寅历日躔表的内容、形式与大业历相同,只列出二十四气下的损益率和盈缩数两组数据。戊寅历与大业历一样,历术中不算定气,损益率、盈缩数用来推算定朔的太阳改正。方法是:

$$\text{定盈缩分} = \text{盈缩数} \pm \text{入气日} \times \text{损益率} / 15$$

所得即为太阳改正分。由此看出,损益率、盈缩数与皇极历日躔表中的陟降率和迟速数相当。其数值为:

$$\text{损益率} = \frac{\text{本气太阳实行度} - \text{太阳平行度}}{\text{月每日平行度}} \times \text{日法}$$

盈缩数是其前各气损益率的累积值。

$$\text{月每日平行度} = (\text{章岁} + \text{章月}) / \text{章岁}$$

日每日平行1度。日法为日的分数。太阳实行度根据实测得出。皇极历、麟德历及以后各历日躔表皆直接给出由实测得出的太阳实行度与平行度之差及其累加累减值。供直接计算定气和太阳位置使用。

戊寅历月离表在一近点月内每日下给出行分、损益率、盈缩积分三个数据。行分为月亮在近点月内每日的实行分,即月日实行度 $\times$ 章岁676,是月离表的最基本数据。损益率为月实行与平行分之差与日法相乘,再被历法除所得之值舍入取整。盈缩积分为其前诸日月实行分、平行分之差与日法相乘的累积值,再加一改正量。即

$$\text{行分} = \text{月实行分} = \text{月实行度} \times 676$$

$$\text{损益率} = (\text{行分} - \text{平行分}) \times \frac{\text{日法 } 13006}{\text{历法 } 28968}$$

舍入取整,即:

$$\text{损益率} = \text{Int}[(\text{行分} - \text{平行分}) \times \text{日法} / \text{历法}]$$

$$\text{盈缩积分} = \sum_{i=1}^{n-1} [(\text{行分} - \text{平行分}) \times \text{日法}] \pm \Delta$$

其中  $\Delta=5$  或  $6$ , 随历日而不同。

月离表后注明, 历行分与次日相减为行差, 后多为进, 后少为退。减去行分 676, 为差法。即:

$$\text{行差} = |\text{历行分} - \text{次日历行分}|$$

如 1 日行分 9909, 2 日 9810, 后少为退, 故行差为退 99。

$$\text{差法} = \text{历行分} - \text{日平行分} 676$$

在大业历中行差称转法(大业历  $10 \times$  转分为月亮实行分), 转法与差法数值俱列于月离表内。

由月离表可以计算月亮的实行位置和定期弦望的月亮改正。得到太阳、月亮改正后, 用来修正经辰时刻, 即得定期弦望时刻。方法是:

入历定盈缩积分

$$= (\text{盈缩积分} \pm \text{入历日余} \times \text{所入日损益率}) / \text{差法}$$

定朔弦望大小余

$$= \text{平辰小余} \pm \text{入气盈缩积分} \pm \text{入历盈缩积分}$$

入气盈缩积分即前面得出的太阳改正, 盈加、缩减; 入历盈缩积分为月亮改正, 盈减、缩加。要注意的是, 入历日余是以历法 28968 分表示的, 即入历日小数需乘 28968 化为分入算, 入气积分、入历积分与平辰小余(亦化为日法分)加减时, 大于日法 13006, 需进 1 日; 不足日法在其日; 小余不足减, 则加日法分减, 这样定日在前 1 日。

戊寅历计算入气、入历盈缩, 数学上使用的都是线性内插。实际上中国历法历书上所注的朔望, 全是依线性内插得出的。

### 三、戊寅历步交会术

#### (一)法数

交会法 12741205.8

交分法 6370602.9(=交会法/2=望差+交限)

朔差 1085494.2(=36×月法-交会法)

望分 6913350[(=交会法+朔差)/2]

交限 5827855.8(=交分法-望差)

望差 542747.1(=朔差/2)

外限 6760782.9(=交分法+10 交时法)

中限 12351025.8(=交会法-10 交时法)

内限 12198458.7(=交会法-望差)

交时法 39018(=36×日法/12)

因为交点月+朔差=朔望月,代入各值得出步交食日分为 36  
×日分 13006=468216。于是可得:

$$\begin{aligned}\text{交点月} &= \frac{\text{交会法}}{36 \times \text{日法}} = 27 \frac{99373.8}{36 \times 13006} \\ &= 27.21223922\end{aligned}$$

$$\text{交分日} = \frac{1}{2} \text{交会日} = 13 \frac{283794.9}{36 \times 13006}$$

$$\begin{aligned}\text{朔差日} &= \frac{\text{朔差}}{468216} = \frac{36 \times \text{月法} 384075 - \text{交会法}}{36 \times 13006} \\ &= 2 \frac{149062.2}{36 \times 13006} = 2.318362038\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{望日} &= \text{望分}/468216 = 14 \frac{358326}{36 \times 13006} \\ &= 14.76530063\end{aligned}$$

$$\text{望差日} = \text{望差}/468216 = 1 \frac{74531.1}{36 \times 13006}$$

$$=1.159181019$$

$$\text{交限日} = \text{交限} / 468216 = 12 \frac{209263.8}{36 \times 13006}$$

$$=12.44693859$$

$$\text{外限日} = 14 \frac{205758.9}{36 \times 13006} = 14.43945294$$

$$\text{中限日} = 26 \frac{177409.8}{36 \times 13006} = 26.37890589$$

$$\text{内限日} = 26 \frac{24842.7}{36 \times 13006} = 26.05305820$$

外限日、中限日、内限日皆为以  $36 \times 13006$  除外限、中限、内限分得出。

## (二)推交分术

$$\text{天正月朔入平交分} = [\text{朔差} \times \text{积月} / \text{交会法}]_R$$

$$\text{天正月望入平交分} = \text{天正朔入交分} + \text{望分}$$

$$\text{次月朔入平交分} = \text{天正朔入平交分} + \text{朔差}$$

得出入交分后，戊寅历采用入气加减法对其修正，得定交分。

依术文，气差改正如下：

时段	气差
大雪、冬至两气	0
交小寒至交惊蛰	$+1650 \times n$ $(n=1, \dots, 3 \times 15.2)$
交惊蛰至交谷雨	$+76100$
交谷雨至交芒种	$+1650 \times (3 \times 15.2 - i)$ $(i=1, \dots, 3 \times 15.2)$
交芒种至交小暑	0
交小暑至交白露	$-1200 \times n$ $(n=1, \dots, 4 \times 15.2)$

交白露至交立冬	-95825
交立冬	-63300
立冬次日至交大雪	$-2110 \times (2 \times 15.2 - i)$
	$(i=1, \dots, 2 \times 15.2)$

若朔望入交在小寒至惊蛰及立夏到芒种间,值盈 2 时以下,则只加半气差,2 时以上,皆不加。加差时,满交会法即去;如减差时,不够减,则加交会法再减。平入交分经入气加减后得定入交分。即

定入交分 = 平入交分 ± 气差

《旧唐书》的方法与此相仿,节气略有差异。得出的定交分,小于交分法时,为在外道;大于交分法时,则去之,余为在内道。其值如在望差以下,为去先交分。交限以上,以减交分,余为去后交分(=交分-交限)。皆以 3 乘日法 13006 约之,为去交时数。望时,这时会发生月食;朔时,内道满足上述条件,则有日食。但虽在外道,去交近仍有食,在内道去交稍远亦不食。

“推月食加时术”给出推算食甚时刻的方法。有月食的望日小余,若入历 1 日,则减 280 分;入历 15 日,加 280 分;入历 14 日,加 550 分;而 28 日,减 550 分。所余值盈历皆加 280,值缩皆减 280。所得即为食望定余。将定余以 12 乘,时法 6503 除,所得为半辰之数。命子半算外,即月食所在辰。因所得为半辰数,日 24 个半辰 12 时辰。故皆以 2 算为 1 辰,即辰初辰正。不尽为时余。

前限、望数、后限、会限(=半食年-前限、望数)为黄道食限。太阳日行 1 度,由日变度为食限度。望差、交限为白道食限。由日化为度数需乘以月每日平行度,为食限度(黄道距交度)。

旧唐志“推月食食分”方法是:

令交时法 39018(=3×13006)。2 时=2×39018,半时=0.5×39018,于是有:

食分=15-不食分

其在冬先后交、春后交、秋先交：

食分=15-(去交分-2×39018)/36183

若春先交、秋后交：

食分=15-(去交分-39018/2)/36183

夏先后交：

食分=15-去交分/36183

去交分不足减时，为月全食。

根据“推月食所起术”所言，戊寅历认为，月在外道，即降交点至升交点黄道南的时候，初亏起东北，食甚西北。若在内道，即在升交点至降交点黄道北半圈时，初亏起东南，食甚西南。13分以上大食分月食，初亏起正东。方位皆据正南方观看而言。

新旧唐书皆给出月食从初亏到复满全程时间的步法。做法是先求出刻率。《新唐书·历志》术文说：

置日月食分，四以下，因增二；五以下，因增三；六以上，因增五。各为刻率，副之。

而《旧唐书》“月食分用刻率”为，食1分用3刻，2分用4刻，3分用5刻，4分6刻，5分8刻，6分9刻，7分10刻，8分11刻，9分13刻，10分14刻，11分15刻，12分16刻，13分18刻，14分用19刻，既用22刻。相当于，4以下，增2；8以下，增3；12以下，增4；14以下，增5；全食为22刻。与《新唐书》所述稍有不同。

依刻率，求得定用刻数。再得出初亏、复满辰刻。由术文有：

定用刻=刻率±刻率×入历损益率/4057

损益率盈减、缩加。

亏初辰刻=食甚辰刻- $\frac{6}{10}$ ×定用刻

复满辰刻=食甚辰刻+ $\frac{4}{10}$ ×定用刻

月食全程时间即亏初至复满辰刻数。

由上看出,戊寅历计算定用刻,已加进了月行迟疾的改正,对月食亏初、复满时刻进行修正。这是交食计算方法的一项新的改革。

步日食法与此相仿,可参照月食步法解读术文得出。

## 第五节 平朔定朔及天文实朔的计算

唐以前中国古历,历书都以平朔注历。傅仁均戊寅历首用定朔,这是历法上一重大改革。

日月同经,谓之合朔。古代历法,认为日月五星皆以匀速运动。取朔望亏盈月相变化的平均周期作为朔望月的长度。这样得到的合朔,称作平朔。实际上,由于地球绕日、月球绕地公转,月相朔望亏满变化是地球上看到的这两种公转运动的综合结果。地绕日、月绕地的公转周期分别以  $E$ 、 $T$  表示。若将地、月相对于恒星的平均运动速度称作  $n$ 、 $n'$ 。则恒星年  $E$ 、恒星月  $T$ 、会合周期朔望月  $S$  的长度及其间的关系为:

$$E = \frac{360^\circ}{n}, T = \frac{360^\circ}{n'}, S = \frac{360^\circ}{n' - n}$$

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{E}$$

如果地绕日、月绕地公转速度不变,那么朔望月长度也就固定。但实际上由于地、月运行轨道并非正圆而是椭圆,轨道运动的角速度时有变化,而且  $E$ 、 $T$  也都有摄动改变,所以朔望月周期是有变化的。笔者统计,实际朔望月长度变化于 29.25~29.90 日之间。由于古历历元的选取及章岁章闰的配合,长时期朔实误差的积累,往往平朔也有一定的失天。日食在朔、月食在望。因此文献常有日食发生在晦、先晦一日及月二日的记载。当历朔后



天时,朔先于历,朔或在晦,食或晦见。此时朔日就可能在傍晚西方天空看到新月。这种情况,古书上称作月朏,朔而月走在日前称朏。反之如历先天,则朔后于历,食可能在初二日发生。如此,则可能在朔日清晨的东方见到残月。朔而月见东方,即朔时月缩在日后,称朒。盈者谓朏;亏缺、不足、缩者谓朒。一般这是由于历法失天所致。由于日行盈缩、月行迟疾引起的实朔平朔的差别,往往会使推算的日月食时刻不准,当食不食,或预报看不到的食而看到了。历法疏密,验在交食。验食不效,说明历法计算的日月食加时,率多不中。在汉以前这是由于不知日行、月行有盈缩、迟疾之故。东汉贾逵认识了月行有迟疾,刘洪乾象历首创月离表,并给出月亮改正的算法。张子信发现日行盈缩,张胄玄、刘焯的定朔算法同时加进了太阳盈缩、月行迟疾改进,并首先在历法中使用日躔表。此后历法验食不效,主要就是日躔表、月离表不够准确的原因了。当然平朔有差仍是关键问题。

设  $L, L'$  为月亮、太阳的平黄经,  $D = L - L'$  为月日平距角。平朔时刻  $T_0$  时, 日月平黄经相等,  $D_0 = L_0 - L'_0 = 0$ 。令  $l, l'$  为月、日平黄经与真黄经  $\lambda, \lambda'$  的改正量。即有:

$$\lambda = L + l, \lambda' = L' + l'$$

$$l = \lambda - L, l' = \lambda' - L'$$

称  $D, l, l'$  1 日的改变量为  $\Delta D, \Delta l, \Delta l'$ 。由已知平朔时刻的这些量, 求距离平朔  $T_0$  时刻  $t$  时的月、日真黄经差, 有:

$$(L + l) - (L' + l')$$

$$= (L_0 - L'_0) + t\Delta D_0 + (l_0 + t\Delta l_0) - (l'_0 + t\Delta l'_0)$$

$(L - L')$  的改正量为  $t\Delta D_0$ ,  $l_0$  的改正量为  $t\Delta l_0$ ,  $l'_0$  的改正量为  $t\Delta l'_0$ 。设  $T$  时, 月日的真黄经相等, 为定朔。此时有  $(L + l) - (L' + l') = 0$ ,  $L_0, L'_0$  为平朔时的月日平黄经, 故  $L_0 = L'_0$ 。于是有:

$$t\Delta D_0 + l_0 + t\Delta l_0 - l'_0 - t\Delta l'_0 = 0$$

$$l_0 - l'_0 + t(\Delta D_0 + \Delta l_0 - \Delta l'_0) = 0$$

所以

$$t = \frac{l'_0 - l_0}{\Delta D_0 + \Delta l_0 - \Delta l'_0}$$

而

$$T = T_0 + t$$

这里

$$l_0 = 5^\circ.058 \sin g + 0^\circ.146 \sin 2g \\ - 0^\circ.238 \sin g' - 0^\circ.130 \sin 2F + \dots$$

$$l'_0 = 1^\circ.919 \sin g' + 0^\circ.020 \sin 2g' + \dots$$

1 日的变化量

$$\Delta D_0 = 12^\circ.191 = \text{月每日平行度} - \text{日每日平行度}$$

$$\Delta l_0 = 0^\circ.273 + 1^\circ.727 \cos g + 0^\circ.101 \cos 2g - 0^\circ.053 \cos 2F$$

$$\Delta l'_0 = 0^\circ.033 \cos g' + 0^\circ.001 \cos 2g'$$

其中,  $g$ 、 $g'$  为月、日的平近点角。  $F$  为月的升交距角, 称月平纬度引数。

$$g = 296^\circ.1046 + 477198^\circ.84911I$$

$$g' = 358^\circ.4758 + 35999^\circ I$$

$$+ 179''.1I - 0''.54I^2$$

$$F = 11^\circ.2509 + 483202^\circ.02515I$$

$$I = (JD \text{ 儒略日} - 2415020.0) / 36525$$

历书时表示的距 1900.0 的儒略世纪数。

由上式计算得出  $t$ , 由  $T = T_0 + t$ , 可以得出比较准确的实朔时刻。

$\Delta l_0$ 、 $\Delta l'_0$  相对于  $\Delta D_0$  是小量, 可以略去。于是:

$$t = \frac{l'_0 - l_0}{\Delta D_0} = \frac{l'_0}{\Delta D_0} - \frac{l_0}{\Delta D_0}$$

此式右边第一项,是日行盈缩改正,第二项是月行迟疾改正。 $l'_0$ 是平朔时太阳真黄经与平黄经之差,即实行度与平行度之差。 $l_0$ 为平朔时刻月亮真黄经与平黄经之差,亦即实行度与平行度差。 $\Delta D_0$ 是月亮太阳每日平行度之差。所以

$$\text{定朔时刻} = \text{平朔时刻} + \frac{\text{日实行} - \text{日平行}}{\text{月行} - \text{日行}} - \frac{\text{月实行} - \text{月平行}}{\text{月行} - \text{日行}}$$

由此可清楚看出,太阳实行大于平行、速度快于平行时,太阳改正为正;反之,日实行速小于平行速,实太阳在平太阳后,太阳改正为负。月亮改正的情况正好相反。月亮实行速大于平行速,实月在平月前,月亮改正为负;月实行速低于平行速,实月在平月后,则月亮改正为正。

在大业历、戊寅历日躔表中,仅给出每气的损益率和盈缩数两项数值。损益率为日实行与平行之差被月平速除;盈缩数给出其前各气损益率的累积值。这是现存最早的两份日躔表。皇极历、麟德历及以后的日躔表,基本上每气都给出四项数值:日实行分与平行分之差,它的累积值,以月平行除日实行与平行之差及它的累积值。日躔表是供推步太阳实际位置、定气和定朔望用的。各历栏目名称稍有差异,内容大致相同。大业历、戊寅历日躔表的损益率、盈缩数,与其他日躔表的后两项数值相当。是用来计算定朔时作太阳改正使用的。与上面得出的定朔改正算式

$$\begin{aligned} t &= \frac{l'_0}{\Delta D_0} - \frac{l_0}{\Delta D_0} \\ &= \frac{\text{日实行} - \text{日平行}}{\text{月行} - \text{日行}} - \frac{\text{月实行} - \text{月平行}}{\text{月行} - \text{日行}} \end{aligned}$$

比较可看出,日躔表中的计算定朔太阳改正数值中,全用月平行代替了月行一日行,而忽略了分母中的日行项。日行虽比月行数小,但还没有小到可以略去不计。月每日平行速约当 13.37 度,日平行 1 度,月减日平行速为 12.37 度。若以月平速代月平

速减日平速作分母,则相对误差约为7.5%。

历代月离表形式大致相仿,在一个历周(近点月)内,给出每日三项主要数值:月实行分,损益率(增减率)为(月实行—月平行)/月平行,及其累加累减值。月实行分为月离表最主要数值。其他几项皆可由它导出。后两项是用来计算定朔望时作月亮改正使用的。与上面得出的定朔改正算式比较可知,和太阳改正类似,月离表中计算月亮改正的数值中,也以月平行代替了分母中的月行减日行。因此也将引入较大误差。大业历、戊寅历月离表中的损益率、盈缩积分,只包含了月实行与月平行之差,即只有上述算式中月亮改正的分子部分。而在计算中,以差分(月实行分—日平行分)除算式的分子。因此,大业历、戊寅历计算定期的月亮改正理论上是比较严谨的。有学者认为,直到宣明历,才改变了以“月行分”代替“月速—日速”这种错误做法,而恢复以“月行—日行”为分母的正确方法。我们考查认为宣明历似仍沿袭仅用“月行分”作分母计算定期的太阳月亮改正。

与上面分析的定期计算中的太阳改正、月亮改正的符号正好相反有联系的一个问题是,日躔表、月离表中的盈缩、迟疾、增减、损益、陟降、朏朙等等的符号问题。趋前、早出为盈,亏缺、不足、晚出为缩。但不能按正义、反义字把日躔表、月离表中的盈、疾、增、益、陟、朏直接释读为加;将缩、迟、减、损、降、朙完全理解成减。

日躔表比较好办,诸历皆以冬至为起点。冬至太阳在近地点附近运行速度最快。以冬至小寒为例试将隋唐诸历的同类值用法比较如下:

历法	(损)益	盈(缩)	大衍	(损)益	(朏)朙
大业	益(损)	(盈)缩	五纪	(损)益	(朏)朙
皇极	陟(降)	(迟)速	正元	(损)益	(朏)朙

戊寅 (损)益 盈(缩) 宣明 (损)益 (朏)朒

麟德 先(后) 盈(朒) 崇玄 (损)益 (朏)朒

月离表分近地点、远地点为起点两种情况,比较其入历 1 日的损益(增减)率、盈缩(朏朒)积:

近地点始历

远地点始历

大业 (损)益 盈(缩) 大衍 (损)益 (朏)朒

皇极 加(减) 朏(朒) 宣明 (损)益 (朏)朒

戊寅 (损)益 盈(缩) 崇玄 (损)益 (朏)朒

麟德 增(减) (迟)速

五纪 (损)益 朏(朒)

正元 (损)益 朏(朒)

月离表这些字的用法是一致的。以麟德历为例。月每日平行分为 895.7。入历 8 日至 21 日,实行小于平行,增减率=(离程实行分一月日平行)/月日平行,在这阶段全为负值。月离表 8~14 日的增减率为减,15~21 日为加。22~28 日实行大于平行(离程大于 895.7),增减值应为正值,但月离表中所注却全为减。而作为增减率累积值的迟速积 1~14 日为速,15~28 日为迟。从表中可看出,增减是对应于迟速值的绝对值而言的。就正负符号而言,当盈缩、迟速、朏朒积,确与字面含义同时,则值正时(盈、速、朏等),损益、增减亦按字义理解;当处负值时(迟、朒、缩等),损益率、增减率的符号与其字义相反,即增、益为负,损、减等为正。以远地点为入转起点的大衍、宣明等历,与此相同。损益率的损益,是指其下朏朒积的绝对值的增减损益而言的。月离表的盈缩、朏朒值的含义与字面是一致的。损益率的正负号在近地点到远地点半周与字面一致;在远地点到近地点,月亮实行后于平行的半周,与字面含义相反。

在所列九历日躔表中,仅有皇极、戊寅、麟德三历的盈缩、迟

速积在冬至到夏至半周为盈(速)积,大业及大衍后的唐历皆作脑(缩),冬至太阳在近地点附近,行速最快,其后半岁,实行总在平行之前,盈缩、朏脑积理应在盈(朏)。为何大业、大衍等历偏要作为脑(缩)呢?这就涉及前面导出的定朔计算中的太阳和月亮改正公式了。公式中太阳、月亮改正的符号相反。太阳改正,实行大于平行者为加;实行小于平行者为减。月亮改正恰好相反。对于戊寅等三历来说,太阳改正需注明盈加、缩减,月亮改正又要加注盈减、缩加。大业、大衍等六历日躔表盈缩、朏脑反义使用,就可把太阳、月亮改正的符号注语统一起来。如大衍历定朔术所说,各置朔弦望大小余,以入气、入转朏脑定数,朏减、脑加之,为定朔弦望大小余。非常简单明了。这六种历法的日躔表、月离表用于太阳、月亮改正的数值用语都予以统一,如皆用损益、盈缩,或全用损益、朏脑。这样使用,并不改变日躔表数据的正负性质。

对于戊寅、皇极、麟德三历日躔的盈缩、迟速含义与字面一致。因此它们的损益、陟降、先后的正负号,与月离表相同。即对于盈(速)为正的半年,损益率、陟降率的益、陟为正,损、降为负;对于夏至到冬至盈缩(迟速)数为缩(迟)、负值的半年,则益陟为负、损降为正。而大业、大衍等六历,冬至到夏至半年,缩脑为正,则益为正、损为负;夏至到冬至半年,盈朏为负,则益为负、损为正。各种情况下,损益率中的损益、陟降、先后都是对其下盈缩(迟速、朏脑)数的绝对值的增减、损益、陟降而言的。

## 第六节 麟德历与定气定朔

### 一、麟德历的修撰与颁行

麟德历的撰制者李淳风是唐代杰出的天文历算家。他给后人留下了不少著作。《晋书》、《隋书》两书的“天文志”、“律历志”

皆出自他的手笔。因其取材完整、适当、合理，叙述准确得体，为后人留下科学可靠的文献依据。是天文志、律历志的典范。“论者谓天文志首推晋隋。”隋书历志对北朝历法并有详论，后世赖以质证。他还是著名的星占学家，与袁天罡齐名，史称李袁，因此也留下了几种星占学著作。但袁天罡（列新旧唐书方技传）科学成就远不如他。

太宗十九年（645），因戊寅历四月连大，又改回重用平朔，历法验食不效就更为突出了。高宗时，太史奏旧历加时浸差，宜有改动。乃诏李淳风造麟德历。历成，诏太史起麟德二年颁用，谓之麟德历。重用定朔。自此以后历法皆用定朔，平定之争，遂告结束。贞观十八年（644）淳风上言，批评戊寅历十九年九月后四朔频大。采用定朔，朔望由天而定，难免会出现这种情况。李淳风创进朔之法予以调整。即将合朔加时在晚间的日子改称晦日，而以次日为历书朔日。如弘道元年（683），依历推十二月甲寅朔，壬午晦，月小。次年正月癸未朔。八月，诏次年元日（正月初一）用甲申。以进朔法改癸未为晦日。是后诸历多采用之，仅各历进朔方法略有进退而已。一行虽已指出四月频大没有关系，进朔无此必要，但仍沿循其法。宋周琮明天历议说，日月相会为朔乃自然规律，人为进朔法未尽善，但亦仅限于议论并未改革。直至元授时历才彻底废除。李淳风详尽研究了刘焯皇极历，并著录在《隋书·律历志》中。使这部优秀历法得以完整保存。未行之历有这样好命运的，仅此而已。麟德历基本承袭皇极历数法，而有所增损变动及改革。

《新唐书·历志》说，古历有章蔀，有元纪，有日分、度分参差不齐，淳风为总法 1340 以一之。仅以戊寅历为例，中朔有日法、度法、气法，入转用历日法，五星有行分法，交会又有自己的日法分。各术皆用不同的日分。麟德历破古章蔀纪元之法，废章岁、

合众日法为一称总法 1340。岁实、朔实、入交、入转、五星布算，统以总法为日分。朱文鑫说，“立法巧捷，胜于前人，后之历家，莫不从之”。

麟德历损益中晷术以考日至，李淳风说，“后汉及魏宋历冬至日中影一丈三尺，夏至一尺五寸，于今并短。须随时影，校其陟降及气日中影，应二至率。他皆仿此。前求每日中影术，古历并无，臣等创立此法也。”经过多年实测，麟德历给出了新的二十四气日中晷影表，并创制用二次差内插法推求每日日中晷影的算法。

《新唐书·历志》说，淳风又“为木浑图，以测黄道”。他完善了每日刻差的数表算法并发展了用每日刻差推求各日黄道去极度及昏旦去中度的方法。并首次在颁行历法中，用刘焯二次差内插算法推求月去黄道度。在历法发展史上都有重要意义。

中宗神龙反政(705)，太史丞南宮说奏：麟德历加时浸疏，又上元甲子之首，五星有人气加时，非合璧连珠之正也。乃诏说等更治乙巳(705)元历。至景龙中历成。诏令施行。俄而睿宗即位，景龙历浸废不行。开元九年(721)，麟德历署日食比不效，诏一行作新历。十五年(727)，草成而一行卒。次年，张说表上大衍历议历术，十七年(729)颁行大衍历。自麟德二年(665)始用，迄开元十六年(728)，麟德历行用共 64 年。东传日本于文武元年(697)始行，日称仪凤历，共行 67 年，迄于天平宝字七年(763)。中日共行 99 年。

麟德历是一部重要历法。多位学者对它有精湛研究。晚清李善兰著《麟德历解》为精心之作，时人刘金沂、纪志刚诸君对定朔、交食、晷漏诸术更有深入独到之研究。他们的成果都在，可以参看。为篇幅计，本书对这部重要历法就仅对几个问题简单做些说明，而不做全面介绍了。



## 二、法数和定气定期

麟德甲子元历：

上元甲子距麟德元年甲子(664)积 269880,算外。

总法 1340

期实 489428

常朔实 39571

辰率 335

$$\text{朔实} = 39571 / 1340 = 29 + 711 / 1340$$

$$= 29.53059701 \text{ 日}$$

$$\text{岁实} = 489428 / 1340 = 365 + 328 / 1340$$

$$= 365.2447761194 \text{ 日}$$

小余均以总法为分母,欲化为辰需乘 12,即

$$12 \times \text{小余} / 1340 = \frac{3 \times \text{小余}}{335}$$

称 335 为辰率,为  $1/4$  总法。一日 12 辰,24 个半辰。辰率就是 3 辰或 6 个半辰的日分。

麟德历称积年(积算)乘期实为期总,以总法 1340 除之为日。即上元至所求年岁前冬至日的日数,期总为分数。期总化为日数后,以 60(干支周期)去除,余数,命甲子算外,即得冬至大小余。大余为干支,小余为日的分数。即有:

$$\text{天正冬至大小余} = [(\text{积年} \times \text{期实} / 1340) / 60]_R$$

具体计算时尽量避免大数字计算,因期实/1340 为岁实,一回归年的日数,为 365.24477612 日。其中 360 可为 60 除尽,故上式可简化为:

$$\text{天正冬至大小余} = [(\text{积年} \times 5.24477612) / 60]_R$$

冬至平月龄,又称闰余,为所求年前冬至距天正十一月平朔的时间间隔。由下式计算:

$$\text{闰余} = [(\text{积年} \times \text{期实}) / \text{常朔实}]_R$$

式中积年、期实、常朔实皆为整数，可简化为：

$$r_1 = [\text{期实} / \text{常朔实}]_R$$

$$\text{闰余} = [(r_1 \times \text{积年}) / \text{常朔实}]_R$$

冬至干支大小余和闰余已知，则可求天正常朔：

$$\text{天正常朔大小余} = \text{冬至大小余} - \text{闰余}$$

冬至大小余，累加气策  $15 \frac{292}{1340} \frac{5}{6}$  日，得各气。由常朔加朔策

$29 \frac{711}{1340}$ ，得次朔。朔加  $\frac{1}{4}$  朔策 ( $7 \frac{512}{1340} \frac{3}{4}$ )，得上弦，再加得望及

下弦。

麟德历描述日行盈缩的日躔表给出反映每气内太阳实行与平行差的四组数据。

躔差率：本气内太阳实行分一平行分。

消息总：其前各气躔差率的累积值。

先后率：本气内太阳实行、平行差与月平行之比，乘月程法 67。

盈脑积：其前各气先后率的累计值。

即有：

$$\text{躔差率} = (\text{太阳实行度} - \text{平行度}) \times \text{总法 } 1340$$

$$\text{消息总} = \sum_1^{n-1} \text{躔差率}$$

冬至为息初、夏至为消初。冬至到夏至 12 气中太阳实行大于平行，实太阳位于平太阳前，为盈、息段。冬至日行最速，冬至到春分日实速大于平速，躔差率为益，是正；春分到夏至，日实速小于平速，躔差率为负，称损。夏至日行最缓，夏至到冬至半年中，实太阳总在平太阳后，为缩、消段，消息总其值是负。夏至到秋分，

实速小于平速，躔差率为负，但对其下消息总而言，绝对数值在增加，故表中称益，其值实为负值；秋分到冬至，日实速大于平速，但为了弥补夏至到秋分实太阳落后于平太阳之差距，实日仍在平日之后，直到冬至始才追及，使实平太阳之差为 0。故这一段实太阳仍在平太阳后，但由于距离不断缩短，所以秋分到冬至段消息总的绝对数值在减少，故表中躔差率称损，但其值实为正值。

$$\text{先后率} = \left( \frac{\text{太阳实行率} - \text{平行度}}{\text{月平行度}} \right) \times \text{月程法 } 67$$

$$\text{盈缩积} = \sum_{i=1}^{n-1} \text{先后率}$$

与消息总、躔差率的分析类似。冬至到夏至半年，盈为正，先后率中先为正后为负。夏至到冬至半年，损为负，先后率中先为负、后为正。

术文说：“各以气下消息积，息减、消加常气，为定气。”

常气即平气、恒气，为等分回归年为 24 份，每份的长度。麟

德历常气长  $365 \frac{328}{1340} / 24 = 15 \frac{292 \frac{5}{6}}{1340} = 15.21853234$  日。平气各气长度皆相等。由术文，有：

$$\begin{aligned} \text{冬至定气} &= \text{常气 } 15.21853234 \pm \frac{\text{消息积}}{1340} \\ &= \text{常气} - \frac{722}{1340} = 14.680 \end{aligned}$$

冬至定气长度，即自交冬至时刻至交小寒之间的时距。定气指太阳沿黄道运动等分为 24 份，每份度数相等。太阳走到每一分点即交一节。因日行有盈缩，太阳走完相等路程所需的时间不同。冬至太阳最速，故冬至定气最短。由上得出麟德历冬至定气只需 14.680 日。同样

$$\text{冬至到大寒定气时距} = 2 \times 15 \frac{292 \frac{5}{6}}{1340} - \frac{1340}{1340}$$

$$= 29 \frac{585 \frac{2}{3}}{1340} = 29.437$$

$$\text{冬至到立春定气时距} = 3 \times 15 \frac{292 \frac{5}{6}}{1340} - \frac{1854}{1340} = 44.272 \text{ 日}$$

$$\text{冬至到春分定气时距} = 6 \times 15 \frac{292 \frac{5}{6}}{1340} - \frac{3708}{1340} = 88.544 \text{ 日}$$

相邻两气之差就是每气定气长度,也可由躔差率直接得出:

$$\text{每气定气长度} = \text{平气长度} \pm \frac{\text{躔差率}}{1340}$$

加减号由前面所述方法决定,即冬至到夏至,益减损加;夏至到冬至,益加损减。如春分定气(交春分至交清明)和立秋定气分别为:

$$\text{春分定气} = 15.2185 + \frac{722}{1340} = 15.757 \text{ 日} \quad (\text{损})$$

$$\text{立秋定气} = 15.2185 + \frac{514}{1340} = 15.602 \text{ 日} \quad (\text{益})$$

由麟德历日躔表计算二十四气各定气长度,结果如表 7-2。

表 7-2 麟德历各定气长度表

气名	定气	气名	定气	气名	定气
冬至	14.680	谷雨	15.602	处暑	15.680
小寒	14.757	立夏	15.602	白露	15.757
大寒	14.835	小满	15.680	秋分	14.680
立春	14.835	芒种	15.757	寒露	14.757
惊蛰	14.757	夏至	15.757	霜降	14.835
雨水	14.680	小暑	15.680	立冬	14.835
春分	15.757	大暑	15.602	小雪	14.757
清明	15.680	立秋	15.602	大雪	14.680

由此看出,春分至秋分半年 12 气,每气皆大于 15 日;秋分至春分半年,每气悉不足 15 天。春分后 12 气共长 188.156 日,秋分后 12 气共长 177.088 天。前者平均每气 15.680,后者平均每气为 14.757 日。其间有下列近似关系:

$$\text{秋分后 12 气} : \text{春分后 12 气} = 16 : 17$$

$$15.680 \times 16 \approx 14.757 \times 17$$

严格的科学计算,春分后半年实长 186.43 日,秋分后半年为 178.82 日。长度比约当 100 : 96 或 25 : 24。

因  $16 + 17 = 33$ , 为简化计算,麟德历取  $365 \frac{328}{1340} / 33 = 11.068 \approx 11$ 。把春分后 12 气视作平均,每气长为  $\frac{365.24477612}{33}$   
 $\times \frac{17}{12} = \frac{11 \times 17}{12} = 15 \frac{7}{12} = 15.5833$  日;把秋分后 12 气看成平均,每  
 气长  $\frac{11 \times 16}{12} = 14 \frac{8}{12} = 14.6667$ 。

麟德历将一年分作两段。每段半年中,以平均长度为气长,采用等间距二次差内插算法计算太阳改正。称以上讨论中的数据,17 为进纲,16 为退纪,11 为泛差,12 为总辰。术文中,称纲纪时都包含与泛差 11 相乘这个因子。因此,纲纪 1/12 即为气长。秋分后半年,气长  $L = \text{进纲}(11 \times 16) / 12$ ;春分后半年,气长  $L = \text{退纪}(11 \times 17) / 12$ 。

日躔表中的躔差率、消息总两栏数据,用以计算定气及任何时刻的太阳实位置。先后率、盈朒积用以推求定朔弦望时的太阳改正。推算气中每日数值的方法是:

令  $\Delta_1$ 、 $\Delta_2$  为本气与后气躔差率或先后率。前已述,纲纪/12 即气长  $L$ ,  $\frac{12}{\text{纲纪}} = \frac{1}{L}$ 。由术文:

$$\text{末率} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L}, \text{总差} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{L}$$

$$\text{别差} = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{L^2}$$

前多( $\Delta_1 > \Delta_2$ )时:

$$\text{初日损益率} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} + \frac{1}{L}(\Delta_1 - \Delta_2)$$

$$t \text{ 日损益率} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} + \frac{1}{L}(\Delta_1 - \Delta_2) - \frac{t}{L^2}(\Delta_1 - \Delta_2)$$

相邻两日的损益率之差  $\frac{1}{L}(\Delta_1 - \Delta_2)$  是常数, 组成一阶算术级数

(等差级数)。求初日到  $t$  日损益率之和  $\sum_1^{t+1}$  损益率, 共  $t+1$  项。有:

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{t}{2}(\text{初日损益率} + t \text{ 日损益率}) \\ &= t \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} + t \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{L} - \frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1 - \Delta_2) \end{aligned}$$

前少( $\Delta_1 < \Delta_2$ )时:

$$\text{初日损益率} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} - \frac{1}{L}(\Delta_1 - \Delta_2)$$

$$t \text{ 日损益率} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} - \frac{1}{L}(\Delta_1 - \Delta_2) + \frac{t}{L^2}(\Delta_1 - \Delta_2)$$

$$\begin{aligned} S(t) &= \sum_1^{t+1} \text{损益率} \\ &= \frac{t}{2}(\text{初日损益率} + t \text{ 日损益率}) \\ &= t \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} - t \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{L} + \frac{t^2}{2L^2}(\Delta_1 - \Delta_2) \end{aligned}$$

再据新、旧唐书术文, 有:

$$t \text{ 日消息总(朒盈积)} T(nL+t) = T(nL) \pm S(t)$$

麟德历分冬至到夏至、夏至到冬至两半年, 在半年中, 取  $L$  是相等的。上式中先加、后减。

与皇极历相同,八节(分至启闭)前的大寒、雨水、谷雨、芒种、大暑、白露、霜降七气,因与后气 $\Delta$ 数值相同,总差、别差悉为0,需做另外处理。取:

$$\text{本气初率} = \text{前气末率} = (\Delta_{\text{前}} + \Delta_{\text{本}}) / 2L$$

$$\text{总差} = |\Delta_{\text{本}} - \Delta_{\text{前}}| / L$$

$$\text{别差} = |\Delta_{\text{本}} - \Delta_{\text{前}}| / L^2$$

前少( $\Delta_{\text{前}} < \Delta_{\text{本}}$ )时:

$$\text{本气末率} = \text{初率} + \text{总差}$$

$$= \frac{\Delta_{\text{前}} + \Delta_{\text{本}}}{2L} + \frac{(\Delta_{\text{本}} - \Delta_{\text{前}})}{L}$$

前多( $\Delta_{\text{前}} > \Delta_{\text{本}}$ )时:

$$\text{本气末率} = \text{初率} - \text{总差}$$

$$= \frac{\Delta_{\text{前}} + \Delta_{\text{本}}}{2L} - \frac{\Delta_{\text{前}} - \Delta_{\text{本}}}{L}$$

初率、末率、总率、别差已知,再依上述方法计算即可。

麟德历以平朔望距定气的时日为气朔距,来计算太阳改正。平朔望距定气不会正好为整数日。为此先将气朔距化为以辰为单位的“辰总”。小余均以总法 1340 为分母。欲化为辰需乘 12,即

$$12 \times \frac{\text{小余}}{1340} = \frac{3 \times \text{小余}}{335} = \frac{3 \times \text{小余}}{\text{辰率}}$$

$$\text{气朔距} = \text{平朔大小余} - \text{其前定气大小余}$$

$$= \text{大余} + \text{小余} / 1340$$

$$\text{辰总} = 12 \times \text{大余} + \frac{3 \times \text{小余}}{\text{辰率}}$$

$$= 12 \times \text{大余} + \frac{12 \times \text{小余}}{4 \times 335}$$

$$= 12 \left( \text{大余} + \frac{\text{小余}}{1340} \right) = 12 \times \text{气朔距}$$

故

$$\text{气朔距 } t = \text{辰总} / 12$$

前多( $\Delta_1 > \Delta_2$ )时:

$$\text{总率} = \text{辰总} \times \text{末率} / 12$$

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{\text{末率} \times \text{辰总}}{12} + \left[ \left( \text{纳纪} - \frac{\text{辰总}}{12} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\text{总差}}{\text{纳纪}} + \text{总差} \right] \times \frac{\text{辰总}}{2 \times 12} \\ &= t \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} + \frac{t}{L} (\Delta_1 - \Delta_2) - \frac{t^2}{2L^2} (\Delta_1 - \Delta_2) \end{aligned}$$

前少( $\Delta_1 < \Delta_2$ )时:

$$\text{总率} = \text{初率} \times \text{辰总} / 12$$

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{\text{初率} \times \text{辰总}}{12} + \frac{\text{辰总}^2}{2 \times 12^2} \times \text{别差} \\ &= t \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2L} - \frac{t}{L} (\Delta_1 - \Delta_2) + \frac{t^2}{2L^2} (\Delta_1 - \Delta_2) \end{aligned}$$

$$\text{定盈朒积 } T(nL + t) = T(nL) \pm S(t)$$

先加、后减。

$$\text{盈朒大小余} = \text{常朔弦望土定盈朒积}$$

盈加、朒减。盈朒大小余即经太阳改正得出的定朔弦望时日。前面曾指出,太阳实行大于平行,实太阳在平太阳前,即麟德历盈朒积为盈时,定朔计算中的太阳改正为正;反之,日实行小于平行,实太阳在平太阳后,麟德历盈朒积为朒时,太阳改正为负。

由上看出,气朔距  $t$  是整数日或带有小数、分数的日数,计算的算式是一样的。

麟德历描述月亮运行的法数为:

变周 443077

变日 27

余 743



变奇 1

变奇法 12

月程法 67(=总法/20)

变周日=变周/(变奇法×总法)

$$= \frac{443077}{12 \times 1340} = 27 \frac{743 \frac{1}{12}}{1340} = 27.5545398 \text{ 日}$$

变周为近点月的分数,近点月长为  $27 \frac{743 \frac{1}{12}}{1340}$ ,月程法 67,用

作月离表实行度化为实行分所乘的因子。

麟德历月离表给出一近点月内,从近地点开始,每日的离程、增减率和迟速积三项数值。离程为月每日的实行度与月程法的乘积;增减率为以月平速除实行与平行之差,再与日法的乘积;迟速积为其前变日增减率的累积值。即

离程=每日实行度×月程法 67

增减率=(离程一月平行分)×日法/月平行分

$$\begin{aligned} \text{迟速积} &= \sum_1^{n-1} \text{增减率} \\ &= \sum \frac{(\text{离程} - \text{月平行分}) \times \text{日法}}{\text{月平行分}} \end{aligned}$$

近地点到远地点的半周,月实速由最大变到最小,远地点到近地点的半周,正好相反。7日、21日月实行速接近平行速。前半周月实行在前,迟速积为速,是正;增减率增为正、减为负。后半周月实行在平行之后,迟速积为迟,是负;增减率增为负,减为正。

离程用于推求月亮的轨道位置。增减率、迟速积用来推求定朔弦望所需的月亮改正数值。

先计算平朔弦望入近点月的日和小数,称入变历日、余。做法如下:

期总 = 积算 × 期实

总实 = 期总 - (天正经朔小余 + 闰余)

天正冬至、经朔大小余、闰余求法前面已述。

$$\text{变分} = \frac{[(\text{奇法 } 12 \times \text{总实}) / \text{变周 } 443077]_R}{\text{奇法}}$$

天正常朔夜半入变 = 变分 / 总法

经朔入变日、余 = 天正常朔夜半入变 + 常朔小余

经辰所入 = [积年 × 岁实(日) / 近点月]<sub>R</sub>

两式结果是一样的。求上弦、望、下弦入变，累加  $7 \frac{512}{1340} \frac{9}{12}$  日，即得。加满变日及余(近点月长度)，去之，入变常非整数日。

推求月亮改正的方法：

由月离表增减率栏看出，增者总是前多，减者皆为前少。令  $\Delta_1$ 、 $\Delta_2$  为人变日、次日增减率。前多(增)即  $\Delta_1 > \Delta_2$ ；减者为前少即  $\Delta_1 < \Delta_2$ 。入余为人变日的小余，即入变日的小数部分。由宋文：

$$t = \frac{\text{入余}}{\text{总法}}, \text{通率} = \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}$$

$$\text{率差} = |\Delta_1 - \Delta_2|$$

增、前多( $\Delta_1 > \Delta_2$ )时：

经辰变率

$$= \left\{ \text{通率} + \frac{1}{2} \left[ \text{率差} + (\text{总法} - \text{入余}) \times \frac{\text{率差}}{\text{总法}} \right] \right\} \times \frac{\text{入余}}{\text{总法}}$$

$$= \left\{ \text{通率} + \frac{1}{2} \left[ \text{率差} + \left( 1 - \frac{\text{入余}}{\text{总法}} \right) \times \text{率差} \right] \right\} \times \frac{\text{入余}}{\text{总法}}$$

$$= t \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + \frac{t}{2} (\Delta_1 - \Delta_2) + (1-t) \frac{t(\Delta_1 - \Delta_2)}{2}$$

$$= t \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + t(\Delta_1 - \Delta_2) - \frac{t^2}{2} (\Delta_1 - \Delta_2)$$

减、前少( $\Delta_1 < \Delta_2$ )时:

经辰变率

$$\begin{aligned} &= \left( \text{通率} + \frac{1}{2} \text{人余} \times \frac{\text{率差}}{\text{总法}} - \text{率差} \right) \times \frac{\text{人余}}{\text{总法}} \\ &= t \left( \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + \frac{t}{2} |\Delta_1 - \Delta_2| - |\Delta_1 - \Delta_2| \right) \\ &= t \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} - t(\Delta_2 - \Delta_1) + \frac{t^2}{2} (\Delta_2 - \Delta_1) \end{aligned}$$

经辰变率为月亮改正的一级近似,与皇极历相似,麟德历月亮改正还要求经辰变率的修正,称作变率增减值。令  $t_0 = \frac{\text{经辰变率}}{\text{总法}}$ 。而

$$\begin{aligned} \text{月亮改正定数} &= \text{迟速积} \pm \text{经辰变率} \pm \text{变率增减值} \\ &= \text{迟速积} \pm \text{经辰定变率} (\text{速减、迟加}) \end{aligned}$$

$$\text{速时, 转余} = \text{人余} - \frac{1}{2} \text{变率};$$

$$\text{迟时, 转余} = \text{人余} + \frac{1}{2} \text{变率}。$$

远地点至近地点半周,为迟时。

增、前多( $\Delta_1 > \Delta_2$ )时:

迟变率增减值

$$\begin{aligned} &= \left\{ \text{通率} + \left[ \text{总法} - \left( \text{人余} + \frac{1}{2} \text{变率} \right) \right] \times \frac{\text{率差}}{\text{总法}} \right\} \times \frac{\text{变率}}{\text{总法}} \\ &= t_0 \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + t_0(1-t)(\Delta_1 - \Delta_2) - \frac{t_0^2}{2} (\Delta_1 - \Delta_2) \end{aligned}$$

速变率增减值

$$\begin{aligned} &= \left\{ \text{通率} + \left[ \text{总法} - \left( \text{人余} - \frac{1}{2} \text{变率} \right) \right] \times \frac{\text{率差}}{\text{总法}} \right\} \times \frac{\text{变率}}{\text{总法}} \\ &= t_0 \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + t_0(1-t)(\Delta_1 - \Delta_2) + \frac{t_0^2}{2} (\Delta_1 - \Delta_2) \end{aligned}$$

减、前少( $\Delta_1 < \Delta_2$ )时:

迟变率增减值

$$= \left[ \text{通率} - \text{率差} + \left( \text{入余} + \frac{1}{2} \text{变率} \right) \times \frac{\text{率差}}{\text{总法}} \right] \times \frac{\text{变率}}{\text{总法}}$$

$$= t_0 \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} - t_0 (\Delta_2 - \Delta_1) + \left( tt_0 + \frac{t_0^2}{2} \right) (\Delta_2 - \Delta_1)$$

速变率增减值

$$= \left[ \text{通率} - \text{率差} + \left( \text{入余} - \frac{1}{2} \text{变率} \right) \times \frac{\text{率差}}{\text{总法}} \right] \times \frac{\text{变率}}{\text{总法}}$$

$$= t_0 \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} - t_0 (\Delta_2 - \Delta_1) + \left( tt_0 - \frac{t_0^2}{2} \right) (\Delta_2 - \Delta_1)$$

经辰定变率 = 经辰变率 ± 变率增减值

速减、迟加。

前多、增( $\Delta_1 > \Delta_2$ )时:

$$\text{迟经辰定变率} = (t + t_0) \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + \frac{t + t_0}{2} (\Delta_1 - \Delta_2)$$

$$+ \frac{t + t_0}{2} [1 - (t + t_0)] (\Delta_1 - \Delta_2)$$

$$\text{速经辰定变率} = (t - t_0) \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + \frac{t - t_0}{2} (\Delta_1 - \Delta_2)$$

$$+ \frac{t - t_0}{2} [1 - (t - t_0)] (\Delta_1 - \Delta_2)$$

前少、减( $\Delta_1 < \Delta_2$ )时:

$$\text{迟经辰定变率} = (t + t_0) \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} - (t + t_0)$$

$$\times (\Delta_2 - \Delta_1) + \frac{1}{2} (t + t_0)^2 (\Delta_2 - \Delta_1)$$

$$\text{速经辰定变率} = (t - t_0) \frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} - (t - t_0)$$

$$\times (\Delta_2 - \Delta_1) + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 (\Delta_2 - \Delta_1)$$

若令

$$T = t \pm t_0$$

(速减、迟加)

则上列经辰定变率四式可统一为:

$$\text{经辰定变率} = T\Delta_1 + \frac{1}{2}T(T-1)(\Delta_2 - \Delta_1)$$

这样,月亮改正的最后形式为:

$$\begin{aligned} S(n+T) &= S(n) \pm \left[ T\Delta_1 + \frac{1}{2}T(T-1)(\Delta_2 - \Delta_1) \right] \\ &= S(n) \pm \left[ T\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2} + T(\Delta_1 - \Delta_2) - \frac{T^2}{2}(\Delta_1 - \Delta_2) \right] \end{aligned}$$

其中  $T = t \pm t_0$  (迟加,速减)。当  $T = t = \frac{\text{入余}}{\text{总法}}$  时,方括号内数值为

经辰变率,为改正的一级近似。 $t_0 = \frac{\text{变率}}{\text{总法}}$ ,  $T = t \pm t_0 = \frac{\text{入余} \pm \text{变率}}{\text{总法}}$

时,方括号内所得经辰变率为二级近似。

定朔望 = 经辰日余 ± 太阳改正 ± 月亮改正

太阳改正与月亮改正符号,前文已做分析。太阳改正盈加、朒减;月亮改正速减、迟加。《旧唐书·麟德历术》曰:此法微密至当,以示算理通涂。若非朔望有交及欲考校速要者,但以入余乘增减率,总法而一,增减迟速为要耳。实际上唐以后历代历书定朔计算,太阳、月亮改正仅采用简单的线性内插算法得出。

麟德历有个很特别之处,它的基本法数中,给出了常朔实、盈朔实和朒朔实三种朔望月长度。常朔实,《旧唐书》麟德历术称恒朔实,是期望月的平均长度。盈朔实、朒朔实为麟德历给出的最长和最短的实朔长度。数值如下:

盈朔实 39933,最长朔望月长度 29.80074624 日;

朒朔实 39220,最短朔望月长度 29.26865672 日;

常朔实 39571, 平均朔望月长度 29.53059701 日。

盈、朏朔实并不能直接由日躔表、月离表数值得出。如春分前后的朔日,若月球适处在远地点和近地点中间,即入变日为 20.67 日附近时,按麟德历这时太阳、月亮改正俱当较大的正值,极大可达  $\frac{801}{1340}$  日 (0.5977612 日)。平朔、实朔相距可达  $14^h.346$ 。这是需加在平朔时刻上的改正量。但并不表示这个月的实朔比平朔长这么多。因为其前月朔当启蛰后一二日,入变 18~19 日,是月的太阳、月亮改正值其和亦约当 0.49925 日 ( $11^h.982$ )。所以其前月实朔仅比平朔长 0.1 日、 $2^h.4$  左右。其下一朔日约近谷雨,入变 23~24 日。太阳、月亮改正俱为正值,其和约当 0.475 日 ( $11^h.41$ )。近春分的朔日,又适值入变 20.67 日左右,则是月约比平朔实约长 0.12 天,不足  $3^h$ 。

麟德历的盈、朏朔实数据是靠长期观测得出的。笔者考查了几千年的实朔长度。长很少有超过 29 日 20 时即 29.83333 日的;短也很少有 29 日  $6^h.5$  以下者 (29.27083 日)。平均朔望月长度 29.5306 日相当于 29 日  $12^h.7344$ 。由此看出,李淳风给出的盈、朏朔实这两个数据是相当准确的。并且他已发现盈分较大 ( $362/1340=0.27015$  日),朏分 ( $351/1340=0.26194$  日)稍小。这也是与观测事实一致的。统计说来,实朔长度为朏者数量稍多,故得到平朔实约为 29.53059 日。

## 第七节 会合运动和月平行速

中国历法中,回归年、朔望月是一切推步的基础,是最常用到的基本数值。为计算定朔弦望、月行迟疾,在步月离中要用到近点月。日食在朔、月食在望,但为判别朔望时是否有食,交食发生时食分的深浅,就需要推求朔望时日月距交点的远近,所以步交

会中离不开交点月。刘洪的乾象历首先将月行迟疾引入历法,并创制月离表。随着步月离、步交会术的发展,以后各历从此又将近点月、交点月作为基本法数列出。计算月行迟疾、定朔望的太阳、月亮改正,都要用到月行分。月行分是指月球对于恒星的位移。月球在恒星背景上行天一周的时间称作恒星月。它实际是月球绕地公转一周所需的时间。恒星月古历未作为基本法数给出。月离表、日躔表中用到的月平行速数值常使初学者感到迷惑。有的历术或历法书中给出求月平行速的算式、方法,但往往学历者也不甚了了。

地球绕日公转一周称作恒星年( $T$ )。与恒星月( $S$ )相似,它们都是以宇宙空间的恒星作为方向标志的。月亮的盈亏圆缺的位相变化是月绕地、地绕日运动的综合结果。月相变化的周期,如从新月到新月、满月至满月的时间,为会合运动周期,称作朔望月( $M$ )。会合即日月地三者处于经度相同的状态。从地球上,即日月同经或相差  $180^\circ$  的情况。连续两次会合的时间间隔为会合周期,即朔望月。

设从望时(月日黄经相差  $180^\circ$ )开始考查月地的运转。一个恒星月后,月绕地一周( $360^\circ$ ),又回到起始的恒星位置。此时地球也运行了  $\alpha^\circ$  角。有:

$$\angle \alpha = \frac{360^\circ}{T} \times S(\text{恒星月})$$

所以这时月日地相对位置并未恢复到起始状态。月要继续追赶,才能又回到起始月日在地球两边、黄经相差  $180^\circ$  的位置。月绕地公转的角速度  $\omega = \frac{360^\circ}{S}$ , 要追赶的角度应为:

$$\angle \alpha_1 = \frac{360^\circ}{T} \times M(\text{朔望月})$$

因月追赶的这段时间内地球仍在走,从而太阳黄经还在增加。追

赶所需要的时间为：

$$t = \frac{a_1}{\omega} = \frac{360^\circ}{T} \times M / \frac{360^\circ}{S} = \frac{360^\circ M}{T} / \frac{360^\circ}{S} = \frac{MS}{T}$$

而  $S(\text{恒星月}) + t = M(\text{朔望月})$ 。所以

$$M = S + \frac{MS}{T}, M - S = \frac{MS}{T}$$

于是

$$\frac{1}{T} = \frac{M-S}{MS} = \frac{M}{MS} - \frac{S}{MS} = \frac{1}{S} - \frac{1}{M}$$

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{S} - \frac{1}{T}$$

称作会合运动方程式。从此式看出，由朔望月、恒星年可求出恒星月，也可相互推求。以  $360^\circ$  乘会合方程两端，得：

$$\frac{360^\circ}{M} = \frac{360^\circ}{S} - \frac{360^\circ}{T}$$

知道朔望月、恒星年长度，即可得出月亮每日平行度  $\left(\frac{360^\circ}{S}\right)$ ，

而  $\frac{360^\circ}{T}$  即为太阳每日平行度。

地球自转轴与公转轨道平面轴线有约  $23^\circ 5'$  的交角。与地球自转轴垂直的大圆称赤道面，地球公转的平面叫黄道面。黄赤道在天球上相交的两点，一称春分点，一为秋分点。由于地球不是正球而呈扁球体状，赤道有所隆起，太阳、月亮对地球赤道多余物质的吸引，使得地球自转轴在天球的指向点北天极围绕黄道北极，以约  $23^\circ 5'$  为半径，在天空做反时针向（从地面往北黄极星空看）旋转，周期约 25800 年。由于天轴方向改变，所以天赤道的位置也在变化。因此黄道赤道的交点（二分点）就在恒星间慢慢向西移动。二分点的这种运动叫作岁差，春分点西移的速度每年  $50''.2(360^\circ/25800)$ ，称黄道岁差常数。



从地球上看来,太阳在黄道上由西向东运行。太阳接连两次通过春分点的时间间隔的平均值,称回归年。因二分点运动方向是自东向西,与太阳的周年视运动正好相反,好像二分点是在迎着太阳走,故回归年要比恒星年时间短。恒星年是视太阳由一个恒星再回到这一点的时间间隔。两者之间差约 20 分钟。这是视太阳移动岁差常数值(二分点每年西移角度)所需要的时间。

每年夏至那天中午,北半球太阳距天顶(地心通过观测者头顶指向天球之点)夹角最小,地面受到的热量最多,为夏天;冬至日正午,太阳与天顶距角最大,地面受到的热量最少,为冬季。四季寒暑变化是由回归年决定的。

由寒暑物候变化、观测日影得到的岁长是回归年。东晋虞喜发现岁差,5 世纪祖冲之大明历始将岁差引入历法计算。以后历法始有周分和岁分之别。其前天周即为岁周。太阳日行 1 度,一岁而周,即只知回归年,而不晓恒星年。

大衍历前,共有 8 部历法引入岁差,但多未行用。颁行历法中,除大明历外,他如大业、戊寅诸历未用周天度分,仍用岁周计算月平行度。

周分(周天分)与岁分之差,为岁差分或称差分、周差,是恒星年与回归年相差的日分。

会合运动方程  $\frac{1}{S} = \frac{1}{M} + \frac{1}{T}$ , 两端各用  $T$  乘,得:

$$\frac{T}{S} = \frac{T}{M} + 1$$

中国历法中,  $T$  即周天分,以度表示为周天度,以日表示即恒星年。此式左端即为月每日平行度。  $M$  为朔实,以日表示即朔望月。所以有:

$$\text{月每日平行度} = \frac{\text{恒星年}}{\text{朔望月}} + 1$$

现代天文历书采用的平回归年、恒星年、朔望月、恒星月长度为：

$$\text{回归年} = 365^{\text{d}}.24218968 - 0^{\text{d}}.00000000616(t-2000)$$

$$\text{恒星年} = 365^{\text{d}}.25636306 + 0^{\text{d}}.0000000010(t-2000)$$

$$\text{朔望月} = 29^{\text{d}}.53058885 + 0^{\text{d}}.0000000022(t-2000)$$

$$\text{恒星月} = 27^{\text{d}}.32166155 + 0^{\text{d}}.0000000019(t-2000)$$

回归年、恒星年相近，只相差 0.0142 日 (1226".88)，回归年比恒星年仅短  $20''27''$ 。在发现岁差以前，或隋唐历法中仍有多种，以回归年  $E$  代恒星年  $T$ ，来推算月平行速。由于  $E \approx T$ ，所以上列会合周期算式仍基本成立，即有：

$$\frac{E}{S} = \frac{E}{M} + 1$$

$$\text{月每日平行度} = \frac{\text{回归年}}{\text{朔望月}} + 1$$

对于采用章岁的历法，由闰周可知：

$$\text{岁实(回归年)/朔策(朔望月)} = \text{章月/章岁}$$

故

$$\text{月每日平行度} = \frac{\text{章月}}{\text{章岁}} + 1 = \frac{\text{章月} + \text{章岁}}{\text{章岁}}$$

$$\text{月每日平行分} = \text{月日平行度} \times \text{章岁} = \text{章月} + \text{章岁}$$

对于不用章岁的历法：

$$\text{月每日平行度} = \frac{\text{岁实} + \text{朔实}}{\text{朔实}}$$

由此可知，根据历法常数周天分(度)、岁实、朔实，就可得出各历的月平行速。

麟德历不用岁差，由上式得出：

$$\text{月每日平行度} = \frac{\text{朔实} + \text{常朔实}}{\text{常朔实}} = 13.36835056 \text{ 度}$$

$$\text{月每日平行分} = \text{月日平行度} \times \text{月程法 } 67 = 895.68$$

月平速一日平速=12.36835056度=828.68分

第五节曾导出由平朔  $T_0$  求定朔  $T$  的算式:

$$T = T_0 + t, t = \frac{l'_0 - l_0}{\Delta D_0 + \Delta l_0 - \Delta l'_0}$$

$l'_0, l_0$  为日月在平朔时间真黄经与实黄经之差;  $D$  是月日平距角;  $\Delta D_0, \Delta l_0, \Delta l'_0$  为  $D, l, l'$  在平朔时 1 日的变化值。式中  $\Delta l_0, \Delta l'_0$  与  $\Delta D_0$  比较是小量, 近似计算时可以略去。 $l'_0, l_0$  分别为平朔时太阳实行减太阳平行与月实行减月平行, 其值可由日躔表、月离表中查出。 $\Delta D$  为月平速一日平速。故

$$\begin{aligned} T &= T_0 + t = T_0 + \frac{l'_0}{\Delta D_0} - \frac{l_0}{\Delta D_0} \\ &= T_0 + \frac{\text{日实行一日平行}}{\text{月平速一日平速}} - \frac{\text{月实行一月平行}}{\text{月平速一日平速}} \end{aligned}$$

麟德历日躔表中的先后率、盈朒积是为计算定朔太阳改正项用的, 月离表中的增减率、迟速积供计算月亮改正项使用。其日躔表以二至点呈镜面对称, 而太阳实行度与平行度之差( $l'_0$ )在二分点达极大。各气及气内各日太阳实行按等差数列变化。二十四气日躔数值由于对称, 只需考查一半; 12 气中 6 个等加速、6 个等减速运动, 绝对数值相同, 又只需考查 6 气即可。日躔表中最基本的数值是躔差率, 其值为:

$$\text{躔差率} = (\text{日实行度} - \text{日平行度}) \times \text{总法 } 1340$$

其余三栏数值, 皆可由它导出。消息总是躔差率的累加累减。先后率、盈朒积直接用于太阳改正。下面考查它们与“日实行一日平行”之间有着怎样的关系。由定朔算式、日躔表有:

$$\begin{aligned} \text{太阳改正} &= \frac{\text{盈朒积}}{1340} = \frac{\text{日实行一日平行}}{\Delta D_0} = \frac{\text{消息总}}{\Delta D_0} \\ \Delta D_0 &= \frac{\text{消息总}}{1340} \div \frac{\text{盈朒积}}{1340} \end{aligned}$$

$$\Delta D_0(\text{分}) = \Delta D_0(\text{度}) \times 67 = \frac{\text{消息总}}{\text{盈朒积}} \times 67$$

据此考查麟德历日躔表太阳改正,如表 7-3。

表 7-3 麟德历日躔表太阳改正考查

	消息总	盈朒积	$\Delta D_0$ 度	$\Delta D_0$ 分
冬至终	722	54	13.37	895.81
小寒终	1340	100	13.40	897.80
大寒终	1854	138	13.43	900.13
立春终	2368	176	13.45	901.45
启蛰终	2986	222	13.45	901.18
雨水终	3706	276	13.43	899.64
			13.42	899.34

考查得知日躔表太阳改正项的  $\Delta D_0$  的平均值为 13.42 度或 899.34 分。而由定朔算式知  $\Delta D_0 = \Delta(L - L')$ , 当 12.37 度 (828.68 分), 为月每日平行度减太阳每日平行度。麟德历月每日平行度为 13.37 度 (895.68 分)。显然在计算定朔太阳改正项时, 以“月平行”代替“月每日平行一日每日平行”, 作为改正项的分母。麟德历月离表月亮改正情况也是如此。即悉以  $\Delta L_0$  代替  $\Delta D_0$ , 作为计算定朔太阳、月亮改正项的分母。在定朔计算中而引进了一定的误差。

## 第八章 大 衍 历

大衍历，唐代高僧一行（俗名张遂，683—727）作。据《旧唐书·天文志》和《新唐书·历志》的记载，开元九年（721），太史频奏麟德历日食不效，唐玄宗因诏僧一行制作新历。一行先与梁令瓚等人造黄道游仪，以验星度。开元十二年（724），黄道游仪成。同年，为制历所作观测已在进行。十五年（727）历草成而一行卒。诏特进张说与历官陈玄景等次为“历术”（即《大衍历》）七篇，“略例”一篇，“历议”十篇<sup>①</sup>。该历于开元十七年（729）颁行。目前可见的《大衍历》（也称《大衍历经》）有两部，一部收于五代所编之《旧唐书》，一部保存在宋代所编之《新唐书》，后者较前者简略，但同时收有一行所作《大衍历议》和《略例》之大要，可以作为注解大衍历之参考。

本章将按大衍历所分“步气朔”、“步发敛”、“步日躔”、“步月离”、“步晷漏”、“步交食”和“步五星”七个部分对其内容进行介绍。

### 第一节 步中朔术

步中朔术是推算一年中节气、朔日的方法。本节基本数据有：

<sup>①</sup> 据张说“大衍历序”，与大衍历相关的著述共包括：“《开元大衍历经》七章一卷，《长历》三卷，《历议》十卷，《立成法》十二卷，《天竺九执历》一卷，《古今历书》二十四卷，《略例奏章》一卷，凡五十二卷”。见《张燕公集》卷十二。

通法:3040 分。一日所包含的日分数,以下各周期多以此为分母。

策实:1110343 分。一回归年所含日分, $1110343/3040 = 365.2444$  日。

揲法:89773 分。一朔望月日分, $89773/3040 = 29.53059$  日。

灭法:91200 分( $=3040 \times 30$ )。30 日整日数月所含日分。

策余:15943 分( $=12 \times$ 中盈分)。见下。

用差:17124 分( $=12 \times$ 朔虚分)。见下。

挂限:87018 分。置闰的界限。

三元之策: $15 \frac{664 \frac{7}{24}}{3040}$  日( $=$ 策实/24)。一平中气所含日数。

四象之策: $29 \frac{1613}{3040}$  日。一朔望月日数。

中盈分: $1328 \frac{14}{24}$  分。因为策实/12= $30 \frac{1328 \frac{14}{24}}{3040}$  日,所以中盈

分即一平中气 30 整数日之外的盈余日分。

朔虚分:1427 分( $=$ 灭法-揲法)。一朔望月与 30 天整日数月之差。

爻数:60。干支数。

象统:24。秒母,亦为二十四节气数。

以上述数据为基础,步中朔术作了如下三项推算。

## 一、安排节气

大衍历所给上元距开元十二年(724)甲子岁共积 96961740 年。该历称所求年到上元年数为积算,并有:

中积分=策实 $\times$ 积算

积日=中积分/3040

(8-1)

其中中积分为上元到所求年冬至的总日分，积日为总日数。积日满爻数去之，余下小于 60 的整日数称为大余，日分称为小余。大余从甲子起算，即可得出所求年天正冬至的干支及小余。加三元之策，以同样方法，可求出次气干支日及小余。其他各中气，依此类推。

## 二、安排朔日和闰月

### (一)推朔日

见图 8-1。图中，B 为所求年冬至前朔日，称为天正经朔。AC 为中积分，AB 称为朔积分，BC(< 揲法)称为归余之挂。

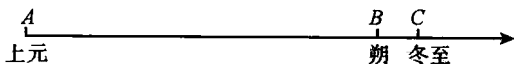


图 8-1 推朔日示意图

727

$$AB = AC - BC$$

$$= n \times \text{揲法} \quad (n \text{ 为正整数}) \quad (8-2)$$

因为  $BC < \text{揲法}$ ，所以式(8-2)中，如 AC 已知，可以求出  $n$ ，进而求出 AB 或 BC。AB/通法，满爻数去之，即得天正经朔大、小余。再以  $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 、1 朔望月日数相加，用同样方法可得该月上弦、望、下弦及后月朔之大、小余。余类推。

### (二)推闰月

如上文求出的归余之挂( $BC$ )  $> 56706$  分<sup>①</sup>，则其岁有闰。否

① 钱宝琮：《新唐书历志校勘记》，见《钱宝琮科学史论文选集》，科学出版社，1988 年。

则下一年归余之挂将 $>56706+(策实-12\times揲法)>揲法$ 。而闰在几月需考查各月闰衰。按术文：

$$\text{闰衰} = \text{归余之挂} + n(\text{中盈分} + \text{朔虚分}) \\ (n=1, 2, \dots, 12)(8-3)$$

式中闰衰为各月平朔至平中气的时间间隔。当某月闰衰 $>$ 挂限时，下一月闰衰将 $>$ 挂限 $+$ 中盈分 $+$ 朔虚分 $>$ 揲法，为无中气之月，当置闰。如以上计算与定朔计算的结果有出入，则以定朔为准。

需要指出的是，大衍历与大多数古代历法一样，规定冬至排在前一年的11月中，因此以上月与闰月的安排也应循此顺序。

### 三、推没、灭日

关于没与灭，《大衍历议·没灭略例》中说：“中分所盈为没，朔分所虚为灭。”<sup>①</sup>即两中气相隔30日之外的余数为求没之数，一个朔望月不到30整数日的差为求灭之数。大衍历推没、灭术的全文为：

凡常气小余不满通法、如中盈分之半以下者，以象统乘之，内秒分，叁而伍之，以减策实。不尽，如策余为日，命常气初日算外，得没日。凡经朔小余不满朔虚分者，以小余减通法，余倍叁伍乘之，用减灭法。不尽，如朔虚分为日，命经朔初日算外，得灭日。<sup>②</sup>

这段术文分别给出了判断没日在哪一节气及求没日的方法和灭日在哪一月及求灭日的方法。先分析没日。没的产生源于

① 《新唐书·历志三上》。

② 《旧唐书·历志四上》。



一节气长度不为整数,每隔一个节气为 15 日盈  $664\frac{7}{24}$  分或每隔两个节气为 30 日盈余  $1328\frac{14}{24}$  分(中盈分),每隔一年为 360 日盈 15943 分(策余)。换言之,就是每年含有  $15943/3040=5.2444$  个没日。没也可以平均到每一日,即每一日可盈没数为(策余/360)/3040=0.01457 日。按这一思路,从上元(子夜)开始,每过一日就有 0.01457 日的盈分。盈分累加达到一日的点可称为没日点,该点所在日即设为没日。求没日需先判定它在哪一节气。大衍历的判定规则为节气小余  $< \frac{1}{2}$  中盈分。而大衍历之前的麟德历和之后的宋元历法采用的规则均为节气小余  $> (\text{通法} - \frac{1}{2} \text{中盈分})$ ①,依此规则,有没之气大余应为 16 日,其后一节气的小余应  $< \frac{1}{2}$  中盈分。显然,按照没日产生的原理②和各历的前后继承关系,大衍历的相关术文是有问题的。

判定了没日在哪一节气,即可求出没日点距该节气前子夜的时间(见图 8-2)。

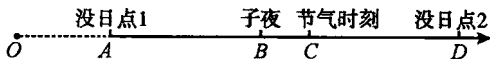


图 8-2 求没示意图

图 8-2 中,  $AD = \text{策实} / \text{策余}; 360 : \text{策余} = AB : BC$ 。③

$$BD = AD - AB = \frac{\text{策实}}{\text{策余}} - \frac{360 \times BC}{\text{策余}}$$

① 见王荣彬,《中国古代历法推没术意义探秘》,《自然科学史研究》,1995,14(3)。

② 关于没日所在节气的证明参见下页注②。

③ 这是一个近似公式。

$$= \frac{\text{策实} - 24 \times 3 \times 5 \times \text{节气小余}}{\text{策余}} (\text{日}) \textcircled{1} \quad (8-4)$$

这就是大衍历求没日点的公式。

推灭术与推没术类似。灭产生于一朔望月长度不为整数，每一朔望月比 30 日少 1427 日分(朔虚分)。即从上元开始，每过一日就产生 1437/30 的虚分，虚分累积达到一日的的时间减去一日，可称为灭日点，灭日点所在日称为灭日。判定灭日在哪一朔望月的条件是经朔小余 < 朔虚分<sup>②</sup>，此时经朔小余 + 朔望月 < 30 日，该月只有 29 日。

求灭日点距该月朔前子夜时间的方法见图 8-3。

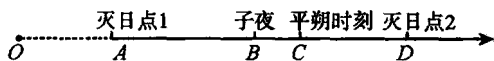


图 8-3 求灭示意图

730

图 8-3 中,  $AD = \frac{30}{1427/\text{通法}} - 1$ , 为两灭日点间的时间间隔,

$(AB+1) : (\text{通法} - BC) = 30 : 1427$ <sup>③</sup>, 由此可求得:

$$AB = \frac{30 \times \text{通法} - 30 \times BC}{1427} - 1$$

$$BD = AD - AB = 30 \times \frac{\text{经朔小余}}{1427} (\text{日}) \quad (8-5)$$

BD 即为大衍历所求时间。

① 此式推导参见景兵:《授时历中日、月运动及交食的研究》, 硕士论文。另外据该文的证明, 当节气小余  $(BC) > (\text{通法} - \frac{1}{2} \text{中盈分})$  时, 有  $CD = BD - BC/\text{通法} =$

$$\frac{\text{策实}(1 - BC/\text{通法})}{\text{策余}} = \frac{\text{三元之策}(\text{通法} - BC)}{\frac{1}{2} \text{中盈分}} < \frac{\text{三元之策}[\text{通法} - (\text{通法} - \frac{1}{2} \text{中盈分})]}{\frac{1}{2} \text{中盈分}}$$

= 三元之策, 即没日应在该节气内。

② 可仿照求没日的方法证明灭日应在此朔望月。

③ 这是一个近似的公式。

关于没与灭的天文意义,目前有两种意见。一种认为它们分别与推算节气干支和朔日干支相关<sup>①</sup>。另一种猜测它们与印度历法有联系,并具有占卜吉凶或宗教方面的作用,这一问题仍需进一步的探讨。

本节算例:

(1)求开元十二年天正冬至大、小余。

按式(8-1):

$$\text{中积分} = 96961740 \times 1110343$$

$$\text{积日} = \text{中积分} / 3040$$

$$= 35414733314.743421(\text{日})$$

因为,积日/60 的整数部分为 590245555,所以

$$\text{冬至大、小余} = \text{积日} - 590245555 \times 60$$

$$= 14.743421(\text{日})$$

查干支表,为第 15 日戊寅,小余 =  $0.743421 \times 3040 = 2259.99984$  日分。

(2)求开元十二年天正经朔大、小余。

按式(8-2):

$$\text{朔积分} = 96961740 \times 1110343 - \text{归余之挂}$$

$$= n \times 89773$$

从中可得出:

$$n = 1199255781$$

$$\text{朔积日} = \text{朔积分} / 3040$$

$$= \frac{1199255781 \times 89773}{3040}$$

$$= 35414733298.589803(\text{日})$$

因为,朔积日/60 的整数部分为 590245554,所以:

<sup>①</sup> 王荣彬:《中国古代历法推没灭术意义探秘》。

$$\begin{aligned}\text{天正经朔大、小余} &= \text{朔积日} - 590245554 \times 60 \\ &= 58.589803(\text{日})\end{aligned}$$

查干支表,为第 59 日壬戌,小余  $= 0.589803 \times 3040 = 1793.00112$  日分。

(3)求开元十二年冬至后第一个没日。

设冬至后第一个节气小余为  $e$ :

因为,  $e = \text{冬至小余} + \frac{1}{2} \text{中盈分} = 2924.291507 > \text{通法} - \frac{1}{2} \text{中盈分} = 2375.708333$

所以,该节气为有没之气。按式(8-4):

$$\begin{aligned}&\text{没日点到该节气子夜时间} \\ &= \frac{1110343 - 360 \times 2924.291507}{15943} \\ &= 3.612749(\text{日})\end{aligned}$$

没日点到冬至子夜时间:

$$15 + 3.612749 = 18.612749(\text{日})$$

验算:

上元在子夜,又是节气的起点,所以也应是没的起点。设开元十二年冬至积日除以一没日数(1110343/15943)的整数部分为  $f$ ,则所求为  $(f+1)$  次没,该没距冬至子夜的时间为  $(f+1) \times 1110343/15943$  减去积日之整数部分,依此可求得  $f = 508506914$ 。

所以:

$$\begin{aligned}&\text{没日点距冬至子夜的时间} \\ &= 508506915 \times \frac{1110343}{15943} - 35414733314 \\ &= 18.612745(\text{日})\end{aligned}$$

(4)求开元十二年天正冬至后第一个灭日。

设冬至后第一个朔日小余为  $g$ :

因为,  $g = \text{天正经朔小余} + \text{朔望月余数} - 3040 = 366.00112 < \text{朔虚分}$ 。所以, 该月为有灭之月。按式(8-5):

$$\begin{aligned}\text{灭日点到该月朔日子夜时间} &= \frac{30 \times 366.00112}{1427} \\ &= 7.694487(\text{日})\end{aligned}$$

从本节算例  $a$ 、 $b$  可知冬至子夜到该月朔日子夜为 14 日, 所以,

$$\begin{aligned}\text{灭日点到冬至子夜时间} &= 14 + 7.694487 \\ &= 21.694487(\text{日})\end{aligned}$$

验算:

上元是朔望月的起点, 也是灭的起点。因为开元十二年天正冬至积日除以一灭日数  $\left(\frac{30 \times 3040}{1427} - 1\right)$  的整数部分为 562940131, 所以本题所求为第 562940132 次灭。

$$\begin{aligned}\text{灭日点距冬至子夜时间} \\ &= 562940132 \times \left(\frac{30 \times 3040}{1427} - 1\right) - \text{积日的整数部分} \\ &= 35414733335.694464 - 35414733314 \\ &= 21.694464(\text{日})\end{aligned}$$

## 第二节 步发敛术

发敛指一年中阳气的发生和收敛。大衍历步发敛术包括二十四节气、七十二候、六十四卦及五行用事时间的推算。其中各项内容均包含了阳历因素。

本节数据有:

天中之策： $5 \frac{221 \frac{31}{72}}{3040}$  日。一候之日数。

地中之策： $6 \frac{265 \frac{86}{120}}{3040}$  日  $\left( = \frac{\text{策实}}{60 \times 3040} \right)$ 。一卦之日数。

贞悔之策： $3 \frac{132 \frac{103}{120}}{3040}$  日  $\left( = \frac{1}{2} \text{地中之策} \right)$ 。

辰法：760 分（=通法/4）。

刻法：304 分（=通法/10）。

表 8-1 是步发敛术中给出的二十四节气、七十二候、六十四卦卦候对应表。七十二候是将一年二十四节气中每一气平分为三份，节气之初为初候；各节气大、小余累加天中之策，为该节气之次、末候。每一候均有相应的植物、动物等物候。据研究，大衍历引入的七十二候来自《逸周书·时则解》，与前此正光历（520）所用七十二候分属不同的系统。<sup>①</sup>

将易经中六十四卦与二十四节气相对应源于西汉的卦气说。这是一种以一年中阴、阳二气的升降、四季二十四节气的推移来解释易经六十四卦变化的道理、为其建立一个合理卦序的理论，东汉末年被引入历法。在大衍历中，一行采用了西汉易学家孟喜的卦气配置方法，把六十四卦分成两部分，其中坎、震、离、兑 4 卦 24 爻分主二十四节气，另外 60 卦分为公、辟、侯、大夫、卿 5 类，每

类 12 卦，每卦主  $365 \frac{743}{3040} / 60 = 6 \frac{265 \frac{86}{120}}{3040}$  日（地中之策）。侯卦又

分为内、外两小卦，每卦主  $3 \frac{132 \frac{103}{120}}{3040}$  日（贞悔之策）。这样 60 卦就

① 陈美东：《月令、阴阳家与天文历法》，《中国文化》，1995 年，第 12 期。

表 8-1 卦候表

常气	四月中正卦节	初候	次候	末候
冬至	坎十一月初六节中	蚯蚓结	麋角解	水泉动
小寒	坎十二月初二节	雁北乡	鹊始巢	雉始雊
大寒	坎十二月初三节中	鸡始乳	雉始雊疾	水泽腹坚
立春	震正月六节四节	东风解冻	蛰虫始振	鱼上冰
雨水	震正月九节五节	獺祭鱼	鸿雁来	草木萌动
惊蛰	震二月初六节	桃始华	仓庚鸣	鹰化为鸠
春分	震二月初九节中	玄鸟至	雷乃发声	始电
清明	震三月初二节	桐始华	田鼠化为鴽	虹始见
谷雨	震三月初三节中	萍始生	鸣鸠拂其羽	戴胜降于桑
立夏	震四月初四节	蚯蚓鸣	丘蚓出	王瓜生
小满	震四月初五节中	苦菜秀	靡草死	小暑至
芒种	震五月初六节	靡靡生	鵙始鸣	反舌无声
夏至	离五月初九节中	鹿角解	桐始鸣	半夏生
小暑	离六月初二节	温风至	蟋蟀居壁	鹰乃学习
大暑	离六月初三节中	腐草为萤	土润溽暑	大雨时行
立秋	离七月初四节	凉风至	白露降	寒蝉鸣
处暑	离七月初五节中	鹰祭鸟	天地始肃	禾乃登
白露	离八月初九节	鸿雁来	玄鸟归	群鸟群羞
秋分	兑八月初九节中	雷乃收声	蛰虫坏户	水始涸
寒露	兑九月初二节	鸿雁来宾	雀人大水为蛤	菊有黄华
霜降	兑九月初三节中	豺乃祭兽	草木黄落	蛰虫咸俯
立冬	兑九月初四节	水始冰	地始冻	雉始入水为蜃
小雪	兑九月初五节中	虹藏不见	天气上胜地气下降	闭塞而成冬
大雪	兑九月初六节	鹖鸟不鸣	虎始交	荔挺生

续表

大雪	十一月 上六节	侯 未济外	大夫 蹇	卿 颐	终卦
小雪	十一月 五中	公 大过	辟 坤	侯 未济内	
立冬	十一月 四节	侯 艮外	大夫 既济	卿 噬嗑	
霜降	九月 六三	公 困	辟 剥	侯 艮内	
寒露	九月 二节	侯 归妹外	大夫 无妄	卿 明夷	
秋分	八月 初九	公 贲	辟 观	侯 归妹内	
白露	八月 上九	侯 巽外	大夫 萃	卿 大畜	
处暑	七月 六五	公 损	辟 否	侯 巽内	
立秋	七月 四节	侯 恒外	大夫 节	卿 同人	
大暑	六月 九三	公 履	辟 遁	侯 恒内	
小暑	六月 二节	侯 鼎外	大夫 丰	卿 涣	
夏至	五月 初九	公 咸	辟 姤	侯 鼎内	
芒种	五月 上六	侯 大有外	大夫 家人	卿 井	
小满	四月 六五	公 小畜	辟 乾	侯 大有内	
立夏	四月 四节	侯 旅外	大夫 师	卿 比	
谷雨	三月 六三	公 革	辟 史	侯 旅内	
清明	三月 二节	侯 豫外	大夫 讼	卿 蛊	
春分	二月初 九中	公 解	辟 大壮	侯 豫内	
惊蛰	二月上 六节	侯 需外	大夫 随	卿 晋	
雨水	二月上 五节	公 渐	辟 泰	侯 需内	
立春	正月 六四	侯 小过外	大夫 蒙	卿 益	
大寒	十二月 六三	公 升	辟 临	侯 小过内	
小寒	十二月 九二节	侯 屯外	大夫 谦	卿 睽	
冬至	十一月 初六中	公 中孚	辟 复	侯 屯内	始卦
常气	四月 正中卦		中卦		

注:据《新唐书·历志四上》。



被拆成了七十二卦,以与七十二候相呼应。推算上述六十卦的方法是,以冬至、大寒等十二中气之初为公卦用事日之始,累加地中之策为辟、候卦内卦用事日之始,再加贞悔之策为候卦外卦用事日之始,余类推。这里的某卦用事日,意为在该段时间内阴、阳二气的升降与其卦相应,同时该时间段也将按相应卦所预言的吉凶度过。<sup>①</sup>

步发敛术所推算的另一项内容五行用事日当与月令相关。在战国末到西汉早期的月令著作中,一岁被分为春、夏、秋、冬四时,每一时又分为孟、仲、季3个月。对这12个月,月令均有星象、物候及与之相应的政事、民事的记述。它还用阴阳五行的理论说明四时的降临,阐述春生、夏长、秋收、冬藏之理,并以此作为设定诸多政令宜忌的依据。<sup>②</sup>五行用事中木、火、金、水四用事之首用事日即分别始自立春、立夏、立秋、立冬时刻,这四个节气日也是四时之首。木、火、金、水每一用事所占全部时间为  $365 \frac{743}{3040}$  /

$5 = 73 \frac{147 \frac{2}{5}}{3040}$  日,土用事日分为4段,每段为  $73 \frac{147 \frac{2}{5}}{3040} / 4$  日,接在木、火、金、水四用事日之后<sup>③</sup>,也即分别始自四季月中气大、小余减去贞悔之策<sup>④</sup>。

除了上述内容,步发敛术还有两项计算,一是求各中气、卦候距经朔时间,称为发敛去朔。一是求中气、卦候距子夜的辰刻。

① 本段内容参见薄树人:《古人历法中的卦气说》,刘钝主编,见《科史薪传》,辽宁教育出版社,1996年。

② 见陈美东:《月令、阴阳家与天文历法》。

③ 参见王应伟:《中国古历通解》,辽宁教育出版社,1998年。

④ 土首用事至季月中气距离=5个节气长-木(或火、金、水)用事所占时间= $5 \times \left( 365 \frac{743}{3040} / 24 \right) - 365 \frac{743}{3040} / 5 =$  贞悔之策。

称为发敛加时。其中：

任一月中气去经朔日算及余秒 = 当月闰衰 / 3040

以天中之策(或地中之策)累加减小式所得值(中气前减,中气后加),得各候(或卦)去经朔日算及余秒。

求发敛加时,即将发敛之小余<sup>①</sup>变为辰刻,大衍历在此所用辰实际为“半辰”,即现在的小时,其公式为:

$$\begin{aligned}\text{发敛加时} &= \frac{6 \times \text{小余}}{\text{辰法}} = \text{半辰数} + \frac{\text{不尽数}}{\text{辰法}} \\ &= \text{半辰数} + \frac{\text{不尽数} \times 5}{3 \times \text{刻法}} (\text{刻})\end{aligned}\quad (8-6)$$

上式用到如下两个比例关系:

$$\frac{\text{半辰数及余}}{24 \text{ 半辰}} = \frac{\text{小余}}{3040}$$

即

$$\text{半辰数及余(发敛加时)} = \frac{6 \times \text{小余}}{\text{辰法}}$$

设半辰之余所相当之刻数为  $a$ , 则:

$$\frac{a}{\text{不尽数/辰法}} = \frac{100}{24}$$

$$a = \frac{\text{不尽数} \times 5}{3 \times \text{刻法}}$$

所得发敛加时从子半起算。

### 第三节 步日躔术

本节主要有三项内容:求太阳不均匀性改正值;黄赤道经度换算;求每日太阳位置。本节给出的三个数据为:

<sup>①</sup> 指从子夜起算的余数。

乾实:  $1110379 \frac{3}{4}$ 。恒星年之日分,也是周天度分。

周天度:  $365 \frac{779 \frac{3}{4}}{3040}$ 度(=乾实/3040)。

岁差:  $36 \frac{3}{4}$ (=乾实-策实)。

## 一、求太阳不均匀性改正值

### (一)日躔表

与大多数历法不同,大衍历是以定气为表列间隔给出的二十四个节气太阳不均匀性改正表,也称日躔表。由于各定气所含时间不同,《旧唐书·历志》在表中列出了每气辰数,《新唐书·历志》则给出了求定气长的公式,现以《旧唐书》为例(见表8-2)。

739

表8-2 日 躔 表<sup>①</sup>

定气	辰数	盈缩分	先后数*	损益率	朏朏积
冬至	173.3	盈 2353	先端	益 176*	朏初
小寒	175.3	盈 1845	先 2353	益 138	朏 176
大寒	177.1	盈 1390	先 4198	益 104	朏 314
立春	178.8	盈 976	先 5588	益 73	朏 418
雨水	180.3	盈 588	先 6564	益 44	朏 491
惊蛰	181.8	盈 214	先 7152	益 16	朏 535
春分	183.5	缩 214	先 7366	损 16	朏 551

① 《旧唐书·历志三》。如果考虑到整张表及后面公式表述的一致性,第5栏夏至到白露的“益”应换为“损”,秋分到大雪的“损”应换为“益”,第6栏中朏意为多余,朏意为不足,均为太阳的平均运动减去实际运动的差。此外表中带\*号的栏目已按《新唐书》等做了校正。

续表

定气	辰数	盈缩分	先后数*	损益率	朏朒积
清明	184.9	缩 588	先 7152	损 44	朒 545
谷雨	186.5	缩 976	先 6564	损 73	朒 491
立夏	188.1	缩 1390	先 5588	损 104	朒 418
小满	189.9	缩 1845	先 4198	损 138	朒 314
芒种	191.9	缩 2353*	先 2353	损 176	朒 176
夏至	191.9	缩 2353	后端	益 176	朒初
小暑	189.9	缩 1845	后 2353	益 138	朒 176
大暑	188.1	缩 1390	后 4198	益 104	朒 314
立秋	186.5	缩 976	后 5588	益 73	朒 418
处暑	184.9	缩 588	后 6564	益 44	朒 491
白露	183.5	缩 214	后 7152	益 16	朒 535
秋分	181.8	盈 214	后 7366	损 16	朒 551
寒露	180.3	盈 588	后 7152	损 44	朒 545
霜降	178.8	盈 976	后 6564	损 73	朒 491
立冬	177.1	盈 1390	后 5588	损 104	朒 418
小雪	175.3	盈 1845	后 4198	损 138	朒 314
大雪	173.3	盈 2353*	后 2353	损 176	朒 176

表 8-2 中,盈缩分是一节气内太阳实行度分与平行度分的差;先后数是盈缩分之和,即从冬至到该节气时刻太阳实行度分和平行度分之差;损益率和朏朒积是以月亮平均速度分别除盈缩分和先后数所得商。此表中,冬至、夏至先后数为零,而且太阳在冬至附近运动最快,说明大衍历以冬至为太阳近地点,夏至为远地点。这个值在开元十二年的误差为  $8^{\circ}87'$ 。<sup>①</sup>

① 陈美东:《古历新探》,辽宁教育出版社,1995年,第322、314页。

《新唐书·历志》有公式：

$$\text{各定气时间长度} = \text{三元之策} \pm \frac{\text{该气盈缩分}}{3040} (\text{日})$$

(盈减, 缩加)(8-7)

此长度乘 12, 即得《旧唐书·历志》中的辰数值。

以日躔表为基础, 可以求出各定气的每日盈缩分、每日先后数、每日朏朧积及平朔时的太阳改正, 也即任一时刻的朏朧积。

## (二) 求各定气每日盈缩分、每日先后数和每日朏朧积

该术术文为：

以所入气并后气盈缩分, 倍六爻乘之, 综两气辰数除之, 为末率。又列二气盈缩分, 皆倍六爻乘之, 各如辰数而一, 以少减多, 余为气差。加減末率(至后以差加, 分后以差减), 为初率。倍气差, 亦倍六爻乘之, 复综两气辰数以除之, 为日差。半之, 以加減初末, 各为定率。以日差累加減气初定率(至后以差减, 分后以差加), 为每日盈缩分。乃驯积之, 随所入气日加減气下先后数, 各其日定(冬至后为阳复, 在盈加之, 在缩减之。夏至后为阴复, 在缩加之, 在盈减之。距四正<sup>①</sup>前一气, 在阴阳变革之际, 不可相并, 皆因前末为初率。以气差至前加之, 分前减之, 为末率。余依前率, 各得所求。其朏朧亦仿此求之, 各得每日定数……)②

设  $\Delta f_1$ 、 $\Delta f_2$  为所入气及后气盈缩分的绝对值,  $L_1$ 、 $L_2$  为上述

① 即二分二至。

② 《旧唐书·历志三》。

两气所含辰数,  $t_1 = L_1/12$ ,  $t_2 = L_2/12$  为其所含日数, 则据术文:

$$\text{末率} = \frac{(\Delta f_1 + \Delta f_2) \times 12}{L_1 + L_2} = \frac{\Delta f_1 + \Delta f_2}{t_1 + t_2}$$

$$\text{气差} = \left| \frac{12\Delta f_1}{L_1} - \frac{12\Delta f_2}{L_2} \right| = \left| \frac{\Delta f_1}{t_1} - \frac{\Delta f_2}{t_2} \right|$$

$$\text{初率} = \text{末率} \pm \text{气差} = \frac{\Delta f_1 + \Delta f_2}{t_1 + t_2} \pm \left| \frac{\Delta f_1}{t_1} - \frac{\Delta f_2}{t_2} \right|$$

(至后加, 分后减)

$$\text{日差} = \frac{2 \times \text{气差} \times 12}{L_1 + L_2} = \frac{2 \left| \frac{\Delta f_1}{t_1} - \frac{\Delta f_2}{t_2} \right|}{t_1 + t_2} \quad (8-8)$$

$$\text{气初定率} = \text{初率} \pm \frac{1}{2} \text{日差} \quad (\text{分后加, 至后减})$$

因分后  $\Delta f_2 > \Delta f_1$ , 至后  $\Delta f_2 < \Delta f_1$ , 上式又可表达为:

$$\text{气初定率} = \frac{\Delta f_1 + \Delta f_2}{t_1 + t_2} + \frac{\Delta f_1}{t_1} - \frac{\Delta f_2}{t_2} - \frac{\frac{\Delta f_1}{t_1} - \frac{\Delta f_2}{t_2}}{t_1 + t_2} \quad (8-9)$$

这是一个不等间距的二次差内插公式, 最近的研究表明, 一行构造这一公式的思路与刘焯构造皇极历中的等间距二次差内插公式的思路是相同的。<sup>①</sup> 当  $t_1 = t_2 = t$  时, 式(8-9)可变为:

$$\begin{aligned} \text{气初定率} &= \frac{\Delta f_1 + \Delta f_2}{2} \cdot \frac{1}{t} + (\Delta f_1 - \Delta f_2) \frac{1}{t} \\ &\quad - \frac{1}{2} (\Delta f_1 - \Delta f_2) \frac{1}{t^2} \end{aligned} \quad (8-10)$$

同刘焯皇极历推太阳每日迟速数术中导出的“气初日陟降数”公式一致。<sup>②</sup>

① 王荣彬:《中国古代历法中的插值法构建原理》,《中国古代数理天文学探析》,西北大学出版社,第281页。

② 参见王荣彬:《刘焯皇极历插值法的构建原理》,《自然科学史研究》,1994,3(4);刘钝:《皇极历中等间距二次差插值方法术文释义及其物理意义》(同上书)。

设  $\frac{1}{t} = t'$ , 式(8-10)即为隋唐历法中常用的等间距二次差内插公式的一般形式。

气初定率是所求节气初日的盈缩分, 大衍历据此给出:

$$\begin{aligned} \text{第 } n \text{ 日盈缩分} &= \text{气初定率} \pm (n-1) \text{ 日差} \\ &\quad (\text{至后减, 分后加}) \quad (8-11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第 } n \text{ 日先后定数} &= \text{该节气初先后定数} \pm \sum_{i=1}^n \text{第 } i \text{ 日盈缩分} \\ &= \text{该节气初先后定数} \\ &\quad \pm \left[ n \times \text{气初定率} \pm \frac{n(n-1)}{2} \text{ 日差} \right] \\ &\quad (8-12) \end{aligned}$$

式(8-12)括号内是至后减, 分后加; 括号外是冬至后盈加缩减, 夏至后盈减缩加。也可一并归纳为前多减, 前少加(括号内据盈缩分判断, 括号外据先后数判断)。

只需将式(8-8)、式(8-9)、式(8-12)中的  $\Delta f$  换成损益率, 先后定数换成朏朞积, 就可以求得第  $n$  日朏朞定数。

### (三)求平朔、望时太阳改正

太阳不均匀性改正在历法中的一个重要应用就是求平朔、望时的太阳改正(见本章第四节小节一), 也即求太阳在二十四节气中任一点时的朏朞定数, 其方法是:

#### (1)推所求年二十四定气大、小余

$$\begin{aligned} \text{各定气大、小余} &= \text{该节气恒气大、小余} \pm \text{气下先后数} \\ &\quad (\text{先减, 后加}) \quad (8-13) \end{aligned}$$

#### (2)推所求平朔(望)到定气的时间间隔

平朔(望)入定气日算及余秒

$$= \text{平朔(望)大、小余} - \text{所入定气大、小余}^{\text{①}} \quad (8-14)$$

(3) 求平朔(望)时太阳改正(朏朒定数)

设平朔(望)入定气日算及余秒为  $n$ , 则:

平朔(望)时太阳改正

$$= \text{所入气朏朒积} \pm \left[ n \times \text{气初定率} \pm \frac{n(n-1)}{2} \text{日差} \right] \quad (8-15)$$

式中气初定率和日差中的  $\Delta f$  均为损益率, 符号是前多减, 前少加(括号内据损益率判断, 括号外据朏朒积判断)。

## 二、黄赤道宿度换算

中国古代测量天体位置以二十八宿赤、黄道距度为基本坐标。大衍历中首先给出了观测所得二十八宿各宿赤道距度值(见第一章第三节), 然后又列出了经黄赤道宿度变换后算得的二十八宿各宿黄道距度值(见第一章第三节)。关于黄赤道差换算, 大衍历和大衍历议均有有关术文, 据术文可列出本书第一章第八节的表 1-18, 若为计算简便, 还可列出如表 8-3 的表格。

表 8-3 中  $a$  为从二分、二至起算的赤道度,  $l$  为相应黄道度,  $(l-a)$  栏在二分前后取正号, 二至前后取负号, 45 度至 46.31 度处值与 45 度处相同。利用此表, 可以在冬至赤道位置已知时从赤道度推出黄道度。大衍历采用的开元十二年冬至赤经, 据其所给岁差推算, 为 10.52 度, 当为该历计算二十八宿黄道距度的标准。<sup>②</sup>

① 若平朔(望)大余不足减, 则加爻数再减。

② 陈美东:《古历新探》, 第 85 页。



表 8-3 黄赤道差换算表<sup>①</sup>

$a$	$l-a$	$\Delta(l-a)$
0	0	0
5	$\pm \frac{12}{24}$	$\pm \frac{12}{24}$
10	$\pm \frac{23}{24}$	$\pm \frac{11}{24}$
15	$\pm 1 \frac{9}{24}$	$\pm \frac{10}{24}$
20	$\pm 1 \frac{18}{24}$	$\pm \frac{9}{24}$
25	$\pm 2 \frac{2}{24}$	$\pm \frac{8}{24}$
30	$\pm 2 \frac{9}{24}$	$\pm \frac{7}{24}$
35	$\pm 2 \frac{15}{24}$	$\pm \frac{6}{24}$
40	$\pm 2 \frac{20}{24}$	$\pm \frac{5}{24}$
45	$\pm 3$	$\pm \frac{4}{24}$

745

### 三、求每日太阳经度

#### (一)求冬至时刻太阳赤经 $a$

中积分满乾实去之,余下小于乾实之数除以通法,为度。从赤道虚九(上元时冬至位置)起算,得  $a$ 。 $a$  实际就是因岁差引起的所求冬至点到上元冬至点的赤经差。

<sup>①</sup> 原文中给出的  $\Delta(l-a)$  为 12, 11, ..., 4, 该数乘以限度 5, 为以 120 为分母的分值, 除以 120 为度。此表直接列出了度数。

(二)求冬至时刻太阳黄经  $b$ 

大衍历将冬至太阳赤经转换成黄经时,把整度数与度余分开计算,其术文为:

以度余减大衍通法,余以冬至日躔之宿距度所入限乘之,为距前分。置距度下黄赤道差,以大衍通法乘之,减去距前分,余满百二十除,为定差。不满者,以象统乘之,复除,为秒分。乃以定差及秒减赤道宿度,余依前命之,即天正冬至加时所在黄道宿度及余也。<sup>①</sup>

设冬至时太阳赤经为  $a$ ,其中整度数为  $a_1$ ,度余为  $a_2$ (度分),则  $a$  处的黄赤道差(定差)等于  $(a_1+1)$  度处黄赤道差减去与(通法  $-a_2$ )相应的黄赤道差,而求太阳黄经  $b$  的公式为:

$$\begin{aligned}
 b &= a - \text{定差} \\
 &= a - \left[ \frac{\text{距度下黄赤道差} \times \text{通法}}{120} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(\text{通法} - \text{度余}) \times \text{冬至日躔距度所入限数}}{120} \right] \\
 &= a - \left\{ \frac{(a_1+1) \text{度处黄赤道差} \times \text{通法}}{120} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(\text{通法} - a_2) \times \left[ 12 - \left( \frac{a_1+1}{5} - 1 \right) \right]}{120} \right\} \quad (8-16)
 \end{aligned}$$

上式中,  $(a_1+1)$  度处黄赤道差取的是以 120 为分母的分值,除以 120 为度。  $\frac{\text{通法} - a_2}{120} \left[ 12 - \left( \frac{a_1+1}{5} - 1 \right) \right]$  即为与(通法  $-a_2$ )

<sup>①</sup> 《旧唐书·历志三》。

相当的黄赤道差,它是由:

$$\frac{(\text{通法}-a_2)\text{所相当的黄赤道差}}{\text{通法}-a_2} = \frac{\left[12 - \left(\frac{a_1+1}{5} - 1\right)\right]/24}{5} \text{①}$$

推导而来。

大衍历的上述公式十分繁琐。实际上不论是否有度余,均可直接利用表格求算黄赤道差,因此该式很少被后世历法采纳。

### (三)求各定气时刻太阳黄经 $c$

$$c = b + n \times \left( \text{三元之策} + \frac{\text{岁差}}{24} \right) \\ (n=1, 2, \dots, 23) \quad (8-17)$$

### (四)求各定气初日夜半太阳黄经 $d$ ②

$$d = c - \text{定气小余} \left( 1 \pm \frac{\text{其日盈缩分}}{\text{通法}} \right) \\ (\text{盈加, 缩减}) \quad (8-18)$$

### (五)求每日夜半太阳黄经 $e$

$$e = d + \sum_{i=1}^n (i \pm \text{第 } i \text{ 日盈缩分}) \text{③} \\ (\text{盈加, 缩减}) \quad (n=1, 2, \dots, 15) \quad (8-19)$$

本节算例:

(1)求开元十二年七月合朔太阳改正

据本章第一节(1)、(2)两算例,七月朔应在节气大暑中。

① 参见王应伟:《中国古历通解》。

② 此夜半应为定气晨前夜半。

③ 此式有近似。因每日盈缩分是从定气时刻而不是子夜起算。

因为,

$$\begin{aligned} & \text{开元十二年大暑恒气大、小余} \\ &= \text{该年冬至大、小余} + 14 \times \text{三元之策} - n \times 60^{\text{①}} \\ &= 227.802659 - n \times 60 \end{aligned}$$

所以,按式(8-13):

$$\begin{aligned} & \text{大暑定气大、小余} \\ &= \text{恒气大、小余} + \text{气下先后数} \\ &= 227.802659 - n \times 60 + 4198/3040 \\ &= 229.18358 - 3 \times 60 \\ &= 49.18358(\text{日}) \end{aligned}$$

(即癸丑日,小余=558.0832 日分)

又因为

$$\begin{aligned} & \text{七月平朔大、小余} \\ &= \text{天正经朔大小余} + 8 \times \text{四象之策} - n \times 60 \\ &= 294.834539 - n \times 60 \\ &= 54.834539(\text{日}) \end{aligned}$$

(即戊午日,小余=2536.99856 日分)

所以,按式(8-14):

$$\begin{aligned} & \text{七月平朔到大暑时间} \\ &= \text{七月平朔大、小余} - \text{大暑定气大、小余} \\ &= 5.650959(\text{日}) \end{aligned}$$

下面是上述计算之示意图(图 8-4):

对于大暑这一节气,损益率  $\Delta f_1 = 104$  分,  $\Delta f_2 = 73$  分,  $t_1 = 188.1/12 = 15.675$  日,  $t_2 = 186.5/12 = 15.5417$  日,  $n = 5.650959$  日,将前面四值代入式(8-8)和式(8-9),得日差=0.124147 分,

① 冬至大、小余及下文天正经朔大、小余值分别见本章第一节算例(1)、算例(2)。  $n \times 60$  意为满 60 去之,下同。

气初定率=7.545697分。又据式(8-15):

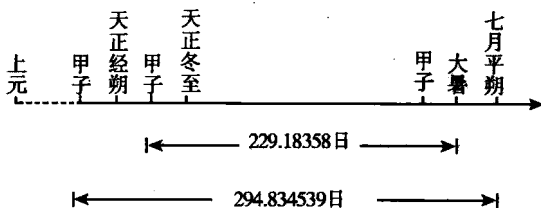


图 8-4 求七月平朔到大暑时间示意图

七月平朔太阳改正(朒)

$$\begin{aligned}
 &= \text{大暑朒脑积} + \left[ n \times \text{气初定率} - \frac{n(n-1)}{2} \text{日差} \right] \\
 &= 314 + \left( 5.650959 \times 7.545697 - \frac{5.650959 \times 4.650959}{2} \right. \\
 &\quad \left. \times 0.124147 \right) \\
 &= 355.008985 (\text{日分}) = 0.116779 (\text{日})
 \end{aligned}$$

(2)求开元十二年七月望太阳改正

从本节算例(1)得:

七月平望到大暑时间

$$\begin{aligned}
 &= \text{七月平朔到大暑时间} + \frac{1}{2} \text{四象之策} \\
 &= 5.650959 + \frac{1}{2} \times 29 \frac{1613}{3040} \\
 &= 20.416255 (\text{日})
 \end{aligned}$$

以此数减去大暑定气日数(188.1/12),得4.741255日,为七月平望到立秋时间。

对于立秋这一节气,损益率  $\Delta f_1 = 73$  分,  $\Delta f_2 = 44$  分,  $t_1 = 186.5/12 = 15.5417$  日,  $t_2 = 184.9/12 = 15.4083$  日,  $n = 4.741255$  日,将前面四值代入式(8-8)和式(8-9),得日差=0.118994分,

气初定率=5.562231分。又据式(8-15):

七月平望太阳改正(朏)

$$= \text{立秋朏朒积} + \left[ n \times \text{气初定率} - \frac{n(n-1)}{2} \text{日差} \right]$$

$$= 418 + (4.741255 \times 5.562231$$

$$- \frac{4.741255 \times 3.741255}{2} \times 0.118994)$$

$$= 443.316583(\text{分}) = 0.145828(\text{日})$$

### (3) 黄赤道换算两例

①将大衍历二十八宿赤道距度表中牛宿距度换算为黄道距度。

大衍历给出斗宿赤道距度 26 度, 牛宿距度 8 度。因冬至点在斗 10.52 度, 所以牛宿起、末点距冬至赤道经度分别为 15.48 度( $a_1$ )和 23.48 度( $a_2$ )。设前者对应黄道度  $l_1$ , 后者对应黄道度  $l_2$ , 则据表 8-3:

$$l_1 = a_1 - \left( 1 \frac{9}{24} + \frac{9}{24} \times \frac{0.48}{5} \right) = 14.069(\text{度})$$

$$l_2 = a_2 - \left( 1 \frac{18}{24} + \frac{8}{24} \times \frac{3.48}{5} \right) = 21.498(\text{度})$$

$$\text{牛宿黄道距度} = l_2 - l_1 = 7.429(\text{度})$$

大衍历所给为 7.5 度。

### ②将大衍历奎宿赤道距度换算成黄道距度。

奎宿在春分点一带。所以先以冬至点赤经+周天度/4 得出春分点在奎 3.5776 度, 则奎的起始点(到春分)赤道经度为 3.5776 度( $a_1$ )。末点(到春分)赤道经度为奎宿赤道距度 16 度减去 3.5776 度, 等于 12.4224 度( $a_2$ )。设其相应黄道度分别为  $l_1$ 、 $l_2$ , 则据表 8-3:

$$l_1 = a_1 + \frac{12}{24} \times \frac{3.5776}{5} = 3.9354(\text{度})$$

$$l_2 = a_2 + \left( \frac{23}{24} + \frac{10}{24} \times \frac{2.4224}{5} \right) = 13.5826 (\text{度})$$

奎宿黄道距度 =  $l_1 + l_2 = 17.518$  度。

大衍历所给为 17.5 度。

## 第四节 步月离术

类似于步日躔术。这一节主要内容也有三项：月亮不均匀性改正和定朔改正；黄白道经度换算；月亮每日白道经度。其所用基本数据为：

转终：6701279（=转终日 $\times$ 3040 $\times$ 80）。近点月秒数。

转终日：27  $\frac{1685 \frac{79}{80}}{3040}$ 。近日月日数。

转法：76。月离表中转分之分母。转分/转法为每日行度。

转秒法：80。转终日秒数之分母。每日 3040 分，每分 80 秒。

751

### 一、月亮不均匀性改正和定朔改正

#### （一）月离表

大衍历给出的月亮不均匀运动表即月离表，见表 8-4。

表 8-4 月 离 表<sup>①</sup>

转日	转分	列衰	转积度	损益率	朏朏积
1	917	进 13	0	益 297	0
2	930	进 13	12.5	益 259	朏 297
3	943	进 13	24.23	益 220	朏 556

<sup>①</sup> 《新唐书·历志四上》。

续表

转日	转分	列衰	转积度	损益率	朓朒积
4	956	进 14	36.54	益 180	朓 776
5	970	进 14	49.22	益 139	朓 956
6	984	进 16	62.4	益 97	朓 1095
7	1000	进 18	75	初益 48 末损 6	朓 1192
8	1018	进 19	88.12	损 64	朓 1234
9	1037	进 14	101.42	损 106	朓 1170
10	1051	进 14	115.15	损 148	朓 1064
11	1065	进 14	129.2	损 189	朓 916
12	1079	进 13	143.3	损 229	朓 727
13	1092	进 13	157.18	损 267	朓 498
14	1105	进 10 退 3	171.46	初损 231 末益 66	朓 231
15	1112	退 13	186.11	益 289	朓 66
16	1099	退 13	200.59	益 250	朓 355
17	1086	退 13	215.18	益 211	朓 605
18	1073	退 14	229.4	益 171	朓 816
19	1059	退 14	243.49	益 130	朓 987
20	1045	退 17	257.44	益 87	朓 1117
21	1028	退 18	271.25	初益 36 末损 18	朓 1204
22	1010	退 18	284.65	损 73	朓 1222
23	992	退 14	298.11	损 116	朓 1149
24	978	退 14	311.15	损 157	朓 1033
25	964	退 14	324.05	损 198	朓 876
26	950	退 13	336.57	损 237	朓 678
27	937	退 13	349.19	损 276	朓 441
28	924	退 7 进 6	361.44	初损 165 末益入后	朓 165



表 8-4 中,转日是月亮到远地点的平均日数;转分是月亮每日实行分数,该值除以转法为每日实行度数;列衰是后一日转分与前一日转分之差值;转积度是逐日转分(化为度数)之和;损益率等于[(月每日平行分-月每日实行分)/月每日平行分]×通法,单位为日分。其中月每日平行分约在 1016 分(13.37 度)上下,各日略有不同<sup>①</sup>;朏朧积是从远地点起算的损益率之和。

从表 8-4 知,作月亮不均匀性改正需先求月亮到远地点的平均日数(入转日),大衍历推算经朔、弦、望及其夜半时刻月亮入转的方法如下:

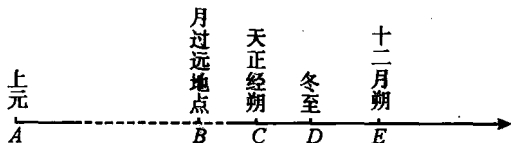


图 8-5 求天正经朔入转示意图

天正经朔入转日(BC)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\text{朔积分} - m \times \text{转终}) \times \text{秒法} - m' \times \text{转终}}{\text{秒法} \times 3040} \text{②} \\
 &= \frac{\text{朔积分} \times \text{秒法} - n \times \text{转终}}{\text{秒法} \times 3040} \text{③} \\
 &= \frac{\text{朔积分} - n \times \text{转终}(\text{分})}{3040} \quad (8-20)
 \end{aligned}$$

天正经朔入转日 + 转差日(转差日 = 四象之策 - 转终日 =

$$1 \frac{2967}{3040} \frac{1}{80} \text{日}), \text{满转终日者去之,即为次朔入转日。其余各朔依此}$$

① 陈美东:《古历新探》,第 300 页。

② 这是《旧唐书》中的公式。转终 = 80 × 转终分,  $m$  为正整数,括号内容表示满 80 倍的转终分去之。 $m'$  及下文中  $n$  均为正整数,乘以转终,意为满转终去之。

③ 这是《新唐书》中的公式。

类推。以 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 四象之策加于平朔入转，得弦、望入转。各入转日减去该朔（弦、望）小余，为其夜半入转日。

## （二）求月亮改正

利用月离表求任一时刻月亮朏朒定数，即月亮改正的术文为：

各置朔、弦、望所入转日损益率，并后率而半之，为通率。又二率相减，为率差。前多者，以入余减通法，余乘率差，盈通法而一，并率差而半之。前少者，半入余，乘率差，亦以通法除之。（皆加通率，入余乘之，通法而一），<sup>①</sup>为加时转率。乃半之，以损益加时所入，余为转余。其转余，应益者，减法。应损者，因余。皆以乘率差，盈通法而一，加于通率，转率乘之，通法约之，以朏减、朒加转率，为定率。乃以定率损益朏朒积，为定数。（其后无同率者，亦因前率。应益者以通率为初数，半率差而减之。应损者，即为通率。其损益入余进退日，分为二日，随余初末，如法求之。所得并以损益转率。此术本出皇极历，以究算术之微变，若非朔望有交者，直以入余乘损益率，如通法而一，以损益朏朒，为定数。）<sup>②</sup>

以上术文中，转定率是与入转余（入余）相应的损益率，这里先考虑前多（应益）时的情形。设所入转日损益率和后日损益率的绝对值分别为 $\Delta f_1$ 、 $\Delta f_2$ ，入余/通法= $t$ ，则按术文：

① 括号内术文据皇极历、麟德历补。

② 《新唐书·历志四上》。

$$\begin{aligned}
 \text{通率} &= \frac{\Delta f_1 + \Delta f_2}{2}, \text{率差} = \Delta f_1 - \Delta f_2^{①} \\
 \text{转率} &= \left\{ \text{通率} + \frac{1}{2} \left[ \frac{(\text{通法} - \text{入余}) \times \text{率差}}{\text{通法}} + \text{率差} \right] \right\} \frac{\text{入余}}{\text{通法}} \\
 &= \frac{\Delta f_1 + \Delta f_2}{2} t + \frac{t}{2} [(1-t)(\Delta f_1 - \Delta f_2) \\
 &\quad + (\Delta f_1 - \Delta f_2)] \\
 &= \frac{\Delta f_1 + \Delta f_2}{2} t + (\Delta f_1 - \Delta f_2) t - \frac{t^2}{2} (\Delta f_1 - \Delta f_2)
 \end{aligned}
 \tag{8-21}$$

这是中国古代历法等间距二次差内插的一般形式(见本章第三节小节一)。所得转率在朏朏积二次差相等时应为与入余相应的损益率,但由于月离表朏朏积的二次差不相等,大衍历仿照皇极历和麟德历,以此为基础又做了第二次改正<sup>②</sup>。设第二次改正值为  $A$ , 转余 = 入余 -  $\frac{\text{转率}}{2}$ ,  $t_0$  = 转率/通法, 则有:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\text{转率}}{\text{通法}} \left[ \text{通率} + (\text{通法} - \text{转余}) \times \frac{\text{率差}}{\text{通法}} \right] \\
 &= t_0 \left[ \frac{\Delta f_1 + \Delta f_2}{2} + \left( 1 - t + \frac{t_0}{2} \right) (\Delta f_1 - \Delta f_2) \right] \\
 &= \frac{\Delta f_1 + \Delta f_2}{2} t_0 + t_0 (1-t) (\Delta f_1 - \Delta f_2) + \frac{t_0^2}{2} (\Delta f_1 - \Delta f_2)
 \end{aligned}
 \tag{8-22}$$

转定率 = 转率 -  $A$

$$= \frac{\Delta f_1 + \Delta f_2}{2} (t - t_0) + (\Delta f_1 - \Delta f_2) (t - t_0)$$

① 率差应为正值, 所以以大减小。下文同此。

② 参见李俨:《中算家的内插法研究》, 科学出版社, 1957 年, 第 31~32 页, 39~40 页; 王荣彬:《中国古代历法中的插值法构建原理》,《中国古代数理天文学探析》, 第 271 页; 纪志刚:《隋唐历法的创造性转变》, 同上, 第 37~40 页。

$$-\frac{(t-t_0)^2}{2}(\Delta f_1 - \Delta f_2) \quad (8-23)$$

关于前少(应损)者的讨论,涉及对“后率”的理解。目前被较多接受的一个观点是,后率为比所入日  $\Delta f$  更小之日的损益率<sup>①</sup>。按这一理解,前少时,后率即指所入日前一日的损益率,设此损益率为  $\Delta f_0$ ,则:

$$\begin{aligned} \text{通率} &= \frac{\Delta f_1 + \Delta f_0}{2}, \text{率差} = \Delta f_1 - \Delta f_0 \\ \text{转率} &= \left( \text{通率} + \frac{\text{入余} \times \text{率差}}{2 \times \text{通法}} \right) \frac{\text{入余}}{\text{通法}} \\ &= \frac{\Delta f_1 + \Delta f_0}{2} t + \frac{t^2}{2} (\Delta f_1 - \Delta f_0) \end{aligned} \quad (8-24)$$

设第二次改正为  $A'$ , 转余 = 入余 +  $\frac{\text{转率}}{2}$ ,  $t_0 = \text{转率} / \text{通法}$ , 则有:

$$\begin{aligned} A' &= \frac{\text{转率}}{\text{通法}} \left( \text{通率} + \text{转余} \times \frac{\text{率差}}{\text{通法}} \right) \\ &= \frac{\Delta f_1 + \Delta f_0}{2} t_0 + t_0 \left( t + \frac{t_0}{2} \right) (\Delta f_1 - \Delta f_0) \end{aligned} \quad (8-25)$$

$$\begin{aligned} \text{转定率} &= \text{转率} + A' \\ &= \frac{\Delta f_1 + \Delta f_0}{2} (t + t_0) + \frac{(t + t_0)^2}{2} (\Delta f_1 - \Delta f_0) \end{aligned} \quad (8-26)$$

如果设  $\Delta f_2 - \Delta f_1 = \Delta f_1 - \Delta f_0$  (实际差很小), 则有  $\Delta f_0 = 2\Delta f_1 - \Delta f_2$ , 将此二式代入式(8-26), 可得:

$$\text{转定率} = \frac{\Delta f_1 + \Delta f_2}{2} (t + t_0) - (\Delta f_2 - \Delta f_1) (t + t_0)$$

① 这一观点是清代学者李善兰首先提出的。参见王荣彬:《中国古代历法中的插值法构建原理》,《中国古代数理天文学探析》,第270页注②。

$$+\frac{(t+t_0)^2}{2}(\Delta f_2-\Delta f_1) \quad (8-27)$$

求得转定率后,即可得:

$$\begin{aligned} & \text{任一时刻月亮朏朧定数(月亮改正)} \\ & = \text{所入转日朏朧积} \pm \text{转定率} \\ & \quad (\text{损减,益加}) \quad (8-28) \end{aligned}$$

### (三)求定朔(望)时刻

求任一时刻太阳改正和月亮改正的目的之一是为了计算定朔(望)时刻。图 8-6 显示了定朔计算的原理:<sup>①</sup>

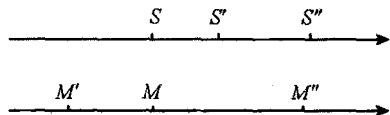


图 8-6 定朔改正示意图

在图 8-6 中,  $S, M$  为平朔时日、月平均位置,  $S', M'$  为其时日、月真位置。  $S'', M''$  为定朔时日、月位置, 如设平朔到定朔的时间间隔为  $\Delta T$ , 而且此时间段内太阳实行速为  $s$ , 月亮实行速为  $m$ , 则:

$$\Delta T = \frac{M'M''}{m} = \frac{S'S''}{s}$$

$$\begin{aligned} \text{因为, 从 } M'M'' &= M'M + SS' + S'S'' \\ &= M'M + SS' + \frac{M'M''}{m}s \end{aligned}$$

可以推出

$$M'M'' = \frac{M'M + SS'}{m-s}m \quad (8-29)$$

<sup>①</sup> 刘金沂:《隋唐历法中入交定日月的几何解释》,《自然科学史研究》,1983,2(4)。

所以

$$\Delta T = \frac{M'M''}{m} = \frac{M'M}{m-s} + \frac{SS'}{m-s} \quad (8-30)$$

式中第一项为月亮平朔时的朏朒定数(月亮改正),第二项为太阳平朔时朏朒定数(太阳改正)。如前所述,在大衍历的日躔表和月离表中,上式的  $m-s$  均近似地取为月亮平均速度。求得  $\Delta T$ , 即有:

$$\begin{aligned} \text{定朔大、小余} &= \text{平朔大、小余} + \Delta T \\ &= \text{平朔大、小余} \pm \text{太阳改正} \pm \text{月亮改正} \\ &\quad (\text{朏减, 朒加}) \quad (8-31) \end{aligned}$$

此式也适用于定弦、定望计算。

确定定朔(弦、望)大、小余之后,可以求出其在定气的位置,并以第三节步日躔术三中的方法求得其晨前夜半太阳黄道度,然后有:

$$\begin{aligned} &\text{定朔(弦、望)时刻太阳黄道度} \\ &= \text{定朔(弦、望)晨前夜半太阳黄道度} \\ &\quad + \text{定朔(弦、望)小余} \left( 1 \pm \frac{\text{其日盈缩分}}{3040} \right) \quad (8-32) \end{aligned}$$

式中符号为盈加缩减。

## 二、黄白道经度换算

类似于黄赤道经度换算,根据大衍历黄白道经度换算的术文,可以列出如表 8-5 的简化表。

表 8-5 中,  $a$  为从黄白正交或半交(黄白大距处)起算的黄道度,  $l$  为相应的白道度,  $(l-a)$  栏在正交前后取正号,半交前后取负号。45 度至 46.31 度处值与 45 度处相同。

表 8-5 黄白道差换算表<sup>①</sup>

$a$	$l-a$	$\Delta(l-a)$
0	0	0
5	$\pm \frac{12}{48}$	$\pm \frac{12}{48}$
10	$\pm \frac{23}{48}$	$\pm \frac{11}{48}$
15	$\pm \frac{33}{48}$	$\pm \frac{10}{48}$
20	$\pm \frac{42}{48}$	$\pm \frac{9}{48}$
25	$\pm 1 \frac{2}{48}$	$\pm \frac{8}{48}$
30	$\pm 1 \frac{9}{48}$	$\pm \frac{7}{48}$
35	$\pm 1 \frac{15}{48}$	$\pm \frac{6}{48}$
40	$\pm 1 \frac{20}{48}$	$\pm \frac{5}{48}$
45	$\pm 1 \frac{24}{48}$	$\pm \frac{4}{48}$

表 8-5 给出的是黄白升交点与黄赤升交点重合时黄白道经度间的关系,由于黄白交点具有沿黄道退行的运动,所以大衍历以黄白交点距冬至、夏至候数乘以表中黄白道差( $l-a$ ),再除以 18,得出黄白交点在任意位置时的黄白道差,称为“月行与赤道差数”。<sup>②</sup>

<sup>①</sup> 原文中给出的  $\Delta(l-a)$  为 12, 11, ..., 4, 该数乘以 5 (限度) 为以 240 为分母的分值, 除以 240 为度。此表直接列出了度数。

<sup>②</sup> 戴内清:《隋唐历法史之研究》,昭和十九年三省堂版,第 90 页;陈遵妫:《中国天文学史》第三册,上海人民出版社,1984 年,第 718~719 页。

### 三、求月亮每日白道经度

求月亮白道经度的步骤是：先求出定朔、弦、望时刻月亮白道经度，再求其夜半和每日夜半及晨昏白道经度。

#### (一)求定朔、弦、望月亮白道经度

##### 1. 求正交时刻月亮黄道宿度

由于交点月是一平均值，所以以其算得的月过交点时刻称为“平交”，而计入不均匀运动后求得的月过交点时刻称为“正交”。求月亮白道经度，需用到黄白道换算，后者又需先知黄白正交点的黄道宿度，也即正交时刻月亮的黄道宿度。大衍历相关的计算可以列成如下各式：

$$\begin{aligned} & \text{平交到平中气时间}(a) \\ & = \text{交终日} - (\text{入交泛日}^{\text{①}} + \text{其月平中气到平朔时间}) \end{aligned} \quad (8-33)$$

$$\begin{aligned} & \text{平交到定中气时间}(b) = a \pm \text{其气初先后数} \\ & \quad (\text{先加, 后减}) \end{aligned} \quad (8-34)$$

$$\begin{aligned} & \text{平交入(定)气朏朒定数}(c) \\ & = \text{所在气朏朒积} \pm \left( \frac{b \text{ 之整数} \times 12 + 3 \times b \text{ 之小余} / 760}{\text{所在气辰数}} \right) \\ & \quad \times \text{其气损益率} \\ & = \text{所在气朏朒积} \pm b \times \text{其气损益率} / \text{所在定气日数} \end{aligned} \quad (8-35)$$

$$\begin{aligned} & \text{平交入转朏朒定数}(d) \\ & = [\text{其日(入转)朏朒积} \pm (\text{平交入定气余} + \text{其日夜} \end{aligned}$$

① 入交泛日是平朔到月过交点时间。参见本章第六节小节一。



$$\text{半入转余})/\text{通法} \times \text{其日损益率} \left] \frac{\text{交率}}{\text{交数}} \quad (8-36)$$

$$\text{正交到定气时间}(e) = b \pm c \pm d \quad (\text{朏减, 朒加}) \quad (8-37)$$

$$\begin{aligned} \text{正交加时黄道宿度}(f) = & \text{正交日夜半太阳黄道宿度} \\ & \pm e \text{之余数} \times (1 \pm \text{其日盈缩分}) \\ & (\text{盈加, 缩减}) \quad (8-38) \end{aligned}$$

上述各式中, 式(8-33)至式(8-37)的推算是为了求出正交到定气时间。以此为基础, 式(8-38)求出的是正交时太阳(而不是月亮)的黄道宿度。但在下面2的计算中, 此值经黄白道换算后却成了正交时月亮白道宿度。这似乎是有问题的。五代及宋以后, 大多数历法将此计算的思路改为先求正交到平朔月亮行度和平朔时太阳黄道度, 由于平朔时日、月平黄经相同, 所以以上两值相加减, 即可得正交时月亮黄道度。前述推算中存在的另外一个比较主要的问题是, 式(8-35)至式(8-37)所用方法与本章第六节的人交定日本类同, 但前者天文意义不明确。唐宣明历时, 式(8-35)和式(8-36)中的交率/交数均被取消, 这一做法后为大多数历法采纳。

## 2. 求正交时刻月亮白道宿度

$$\begin{aligned} & \text{正交加时月离九道宿度}(g) \\ & = f \pm \frac{\text{正交点距冬至、夏至候数} \times \text{定差}}{18} \quad (8-39) \end{aligned}$$

式中,

$$\begin{aligned} \text{定差} = & [\text{距度下黄白道差} \times \text{通法} - (\text{通法} - \text{正交加时度余}) \\ & \times \text{正交之宿距度所入限数}] \div 240 \\ = & \left\{ \text{距度下黄白道差} \times \text{通法} - (\text{通法} - \text{正交加时度} \right. \end{aligned}$$

$$\text{余}) \times \left[ 12 - \left( \frac{\text{正交加时整度数} + 1}{5} - 1 \right) \right] \div 240 \quad (8-40)$$

以上两式中各项意义及推导过程可参见本章第三节小节三。

### 3. 求定朔、弦、望时刻月亮白道度

该段术文为：

各置其日加时日躔所在，变从九道，循次相加。凡合朔加时月行潜在日下，与太阳同度，是为离象（凡置朔、弦、望加时黄道日度，以正交加时所在黄道宿度减之，余以加其正交九道宿度，命起正交宿度算外，即朔、弦、望加时所当九道宿度也。其合朔加时若非正交，则日在黄道，月在九道，各入宿度，虽多少不同，考其去极。若应准绳，故云月行潜在日下，与太阳同度）。以一象之度九十一、余九百五十四、秒二十二半为上弦，兑象。倍之而与日冲，得望，坎象。叁之，得下弦，震象。各以加其所当九道宿度，秒盈象统从余，余满大衍通法从度。命如前，各其日加时月所在度及余秒也。<sup>①</sup>

图 8-7 为求定朔月亮白道经度之示意图。图中 AC 为黄白正交点的黄道宿度，前文已提到，大衍历的相关计算是有问题的。BC 为正交点的白道宿度，应由式(8-39)求出。S、M 分别为定朔时太阳和月亮位置。

大衍历小注<sup>②</sup>中的方法以公式表示即为：

$$BM = BC + (AS - AC) \quad (8-41)$$

① 《旧唐书·历志三》。

② 即括号中文字。

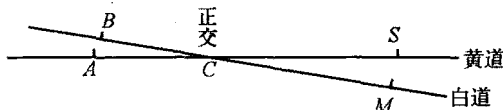


图 8-7 求定朔月亮白道经度

这一计算显然有些粗略,因为从 CS 到 CM 应当同从 AC 到 BC 一样,进行黄白道经度的换算。

## (二)求每日夜半及晨昏月亮白道经度

### 1. 求每日月转定度(从子夜到子夜月亮实行度)

月离表中每日转分是从月过远地点时刻起算的,这一时刻并不一定在子夜,为下面计算的需要,大衍历以下式求出:

月转定度 = 当日夜半入转日之转分 / 转法

$$\pm \frac{\text{当日夜半入转余} \times \text{列衰}}{\text{通法} \times \text{转法}}$$

(进加,退减)(8-42)

式中每日夜半入转余的求法是,先求定期夜半入转,此值多与本节求得的经朔夜半入转相同,只是在定期大余有变化时,才加(或减)一日。以一日之数累加,即得定期后各日夜半入转日及余。

### 2. 求定朔(弦、望)晨前夜半月亮白道经度

该术文为:

视定朔、弦、望夜半入转,各半列衰以减转分。退者,定余[减通法,余]<sup>①</sup>乘衰,以通法除,并衰而半之。进者,半余乘衰,亦以通法除,皆加所减,乃以定余乘之,

① 括号内为佚文,参照本节求月亮脱躔定数之术文补。

盈通法而一，以减加时月度，为夜半月度。<sup>①</sup>

按术文列出公式：

$$\begin{aligned} \text{定期夜半月亮白道度} &= \text{定期时刻月亮白道度} \\ &\quad - \text{定期小余内月亮实行分} \end{aligned} \quad (8-43)$$

求弦、望同此。

上式中，定期时刻月亮白道度已由式(8-41)求出。如设定朔小余内月亮实行分为  $B$ ，定期(弦、望)夜半入转日之转分为  $f_1$ ，当  $f_1 > f_2$  (即退)时，列衰 =  $f_1 - f_2$ ，当  $f_1 < f_2$  (即进)时，列衰 =  $f_2 - f_1$ ，定余<sup>②</sup>/通法 =  $t$ ，则按术文：

$$\begin{aligned} B \text{ 退} &= \left\{ \left( \text{转分} - \frac{\text{列衰}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left[ \frac{(\text{通法} - \text{定余} \times \text{列衰})}{\text{通法}} + \text{列衰} \right] \right\} \frac{\text{定余}}{\text{通法}} \\ &= \frac{f_1 + f_2}{2} t + (f_1 - f_2) t - \frac{t^2}{2} (f_1 - f_2) \end{aligned} \quad (8-44)$$

$$\begin{aligned} B \text{ 进} &= \left[ \left( \text{转分} - \frac{\text{列衰}}{2} \right) + \frac{\text{定余} \times \text{列衰}}{2 \times \text{通法}} \right] \times \frac{\text{定余}}{\text{通法}} \\ &= \frac{f_1 + f_2}{2} t - (f_2 - f_1) t + \frac{t^2}{2} (f_2 - f_1) \end{aligned} \quad (8-45)$$

二式实际上是相同的。

### 3. 求每日夜半及晨昏<sup>③</sup>月亮白道经度

定期(弦、望)次日夜半月亮白道经度

① 《新唐书·历志四上》。

② 即定期小余。由于定期小余不是始自入转日之起点，下面的公式是有近似的。

③ 晨、昏分别为日出前、日入后两刻半。

=定朔(弦、望)夜半月亮白道度+其日转定度 (8-46)  
余类推。

(望前)每日昏时月亮白道度

$$= \text{月亮当日夜半白道度} + \frac{\text{当日月转定分}}{\text{转法}} \times \left(1 - \frac{\text{其日夜漏}}{2 \times 100 \text{ 刻}}\right) \quad (8-47)$$

(望后)每日晨时月亮白道度

$$= \text{月亮当日夜半白道度} + \frac{\text{当日月转定分}}{\text{转法}} \times \frac{\text{其日夜漏}}{2 \times 100 \text{ 刻}} \quad (8-48)$$

本节算例:

(1)求开元十二年七月朔月亮改正和定朔大、小余

①求开元十二年天正经朔入转日(BC)。

按本节式(8-20):

$$\begin{aligned} BC &= \frac{\text{朔积分} - n \times \text{转终(分)}}{3040} \\ &= \frac{1199255781 \times 89773^{\text{①}} - n \times 83765.9875}{3040} \end{aligned}$$

其中朔积分 -  $n \times$  转终分 < 转终分, 由此求得  $n$   
=1285256611。

$$\text{所以, } BC = \frac{16394.6375}{3040} = 5.392973(\text{日})。$$

②求开元十二年七月朔入转日。

七月朔入转日 =  $BC + 8 \times$  转差日

$$= 5.392973 + 8 \times 1 \frac{2967 \frac{1}{80}}{3040}$$

① 见本章第一节算例(2)。

$$=21.200901(\text{日}).$$

③求七月朔月亮改正和定朔大、小余。

从②可知七月朔入转在第22日,属于“其后无同率”中“应损者”之特例。对此特例,大衍历相关术文过于简略,可能有若干脱误。在没有取得令人满意的研究结果之前,本算例拟暂用一次差内插计算其月亮改正。对采用此改正值求入交定日的第六节算例(1)来说,这一近似造成的误差是十分微小的。

按式(8-28):

七月朔月亮改正(朏)

$$\begin{aligned} &= \text{月离表第22日朏脑积} - \text{第22日损益率} \times \text{入转余} / \text{通法} \\ &= 1222 - 73 \times 0.200901 \\ &= 1207.334227(\text{分}) = 0.397149(\text{日}) \end{aligned}$$

按式(8-31):

七月定朔大、小余

$$\begin{aligned} &= \text{七月平朔大、小余}^{\text{①}} - \text{太阳改正}^{\text{②}} - \text{月亮改正} \\ &= 54.834539 - 0.116779 - 0.397149 \\ &= 54.320611(\text{日}) \end{aligned}$$

即戊午日,小余

$$= 0.320611 \times 3040 = 974.65744(\text{分})$$

(2)求开元十二年七月望月亮改正和定望大、小余

①求七月望入转日。

七月望入转日

$$= \text{七月朔入转日}^{\text{②}} + \frac{1}{2} \text{四象之策} - \text{转终日}$$

① ①、② 见本章第三节算例(1)。

② 见算例(1)。

$$=21.200901+\frac{1}{2}\times 29\frac{1613}{3040}-27\frac{1685}{3040}\frac{79}{80}$$

$$=8.411596$$

②求七月望月亮改正。

从①可知,七月望入转在第9日,损益率为前少,将  $\Delta f_1 = 106$ 、 $\Delta f_0 = 64$ 、 $t = 0.411596$  代入式(8-24),得转率 = 38.543297(分)。设  $t_0 = \text{转率}/\text{通法} = 0.012679$ ,与上述各量一同代入式(8-25),得  $A' = 1.300273(\text{分})$ 。

又按式(8-26):

$$\text{转定率} = \text{转率} + A' = 39.84357(\text{分})$$

最后按式(8-28):

$$\begin{aligned} & \text{七月望月亮改正(朏)} \\ &= \text{第9日朏朏积} - \text{转定率} \\ &= 1170 - 39.84357 \\ &= 1130.15643(\text{分}) = 0.371762(\text{日}) \end{aligned}$$

③求七月定望大、小余。

七月平望大、小余

$$\begin{aligned} &= \text{七月平朔大、小余}^{\text{①}} + \frac{1}{2} \text{四象之策} - 60 \\ &= 54.834539 + \frac{1}{2} \times 29\frac{1613}{3040} - 60 \\ &= 9.599835(\text{日}) \end{aligned}$$

按式(8-31):

七月定望大、小余

$$= \text{七月平望大、小余} + \text{月亮改正} - \text{太阳改正}^{\text{②}}$$

① 见本章第三节算例(1)。

② 见本章第三节算例(2)。

$$=9.599835+0.371762-0.145828$$

$$=9.825769(\text{日})$$

即癸酉日，

$$\text{小余}=9.825769 \times 3040 = 2510.33776(\text{日分})$$

## 第五节 步晷漏术

交统:1520分( $=\frac{1}{2}$ 通法)。

象积:480分( $=\frac{3}{19} \times \text{通法}$ )<sup>①</sup>。一刻所含刻分。

辰刻:8刻160分(一辰=100/12;刻=8 $\frac{160}{480}$ 刻)。

昏明刻:2刻240分(日没后二刻半为昏,日出前二刻半为明,

二刻半即2 $\frac{240}{480}$ 刻)。

步晷漏术主要包括了与太阳位置变化相关的四项内容,即阳城日晷、漏刻、黄道去极度和距中星度。大衍历首先按定气日列出了这些项目的数值,见表8-6。

表8-6中的后四项分别是阳城地区每一定气初的中晷长度、 $\frac{1}{2}$ 夜漏刻、黄道去极度(太阳去极度)和距中星度(昏明时刻太阳至子午线的赤经差)。消息衰是一与上述项目当日变化量相关的值,下文将表明,此值可以通过不同的比例关系与表中各项目相联系。陟降率是该节气各日消息衰的一次差。任一日的消息衰又称消息定衰,它是以下各项计算的基础,其求法为:

① 见王应伟:《中国古历通解》。



表 8-6 暑漏中星表<sup>①</sup>

定气	陟降率	消息衰	阳城日晷 (尺)	漏刻	黄道去极度	距中星度
冬至	降 78	息 0.64	12.7150	27 刻 230 分	115.20	82.26
小寒	降 72	息 11.91	12.2277	27 刻 145 分	114.35	82.91
大寒	降 53	息 22.42	11.2182	26 刻 380 分	111.90	84.77
立春	降 34	息 30.25	9.7351	25 刻 475 分	108.05	87.70
雨水	降 初限 78	息 35.78	8.2106	24 刻 470 分	103.20	91.39
惊蛰	降 1	息 39.50	6.7384	23 刻 360 分	97.30	95.88
春分	陟 5	息 39.65	5.4319	22 刻 240 分	91.30	100.445
清明	陟 初限 1	息 38.89	4.3211	21 刻 120 分	85.30	105.01
谷雨	陟 32	息 33.56	3.3047	20 刻 10 分	79.40	109.50
立夏	陟 52	息 28.38	2.5331	19 刻 5 分	74.55	113.19
小满	陟 63	息 22.12	1.9576	18 刻 100 分	70.70	116.12
芒种	陟 64	息 10.12	1.6003	17 刻 335 分	68.25	117.98
夏至	降 64	消 0.52	1.4779	17 刻 250 分	67.40	118.63

<sup>①</sup> 《新唐书·历志四上》。此表据《历代天文律历等志汇编·七》(中华书局 1976 年版)和陈美东《古历新探》第 191~192 页校正。

续表

定气	陟降率	消息衰	阳城日晷 (尺)	漏刻	黄道去极度	距中星度
小暑	降 63	消 10.76	1.6003	17 刻 335 分	68.25	117.98
大暑	降 52	消 20.75	1.9576	18 刻 100 分	70.70	116.12
立秋	降 32	消 28.90	2.5331	19 刻 5 分	74.55	113.19
处暑	降 初限 99	消 34.55	3.3047	20 刻 10 分	79.30	109.50
白露	降 5	消 38.90	4.3211	21 刻 120 分	85.30	105.01
秋分	陟 1	消 39.66	5.4319	22 刻 240 分	91.30	100.445
寒露	陟 初限 1	消 39.50	6.7384	23 刻 360 分	97.30	95.88
霜降	陟 34	消 34.98	8.2106	24 刻 470 分	103.20	91.39
立冬	陟 53	消 29.72	9.7351	25 刻 475 分	108.05	87.70
小雪	陟 72	消 21.70	11.2182	26 刻 380	111.90	84.77
大雪	陟 78	消 11.13	12.2277	27 刻 145 分	114.35	82.91

某节气第  $n$  日消息定衰

$$= \text{该节气初日消息衰} \pm (n-1) \times \text{陟降率} / 100^{\text{①}}$$

(陟减, 降加) (8-49)

这是一个等差级数, 如求前  $n$  日消息定衰之和, 可用等差级

① 雨水、清明、处暑、寒露消息定衰求法见本书第一章第五节。

数的求和公式。

## 一、求阳城地区八尺表每日午中晷长

### (一)求太阳天顶距与晷长对应表<sup>①</sup>

八尺表午中晷长与太阳天顶距有固定的关系。大衍历首次给出了据观测定出的太阳天顶距从0度到80度所对应的晷影长表格,称为“戴日之北每度晷数”(见本书第一章表1-30),其中戴日之北度即指太阳天顶距。<sup>②</sup>

### (二)求每日晷差

每日晷差即每日晷长变化量,先求得:

各节气气初戴日之北度数

=该气气初黄道去极度一极去戴日下度 (8-50)

771

式中极去戴日下度为阳城一地北天极的天顶距,等于56.825度。

其后求每日晷差,大衍历此处只有一句术文:“各以其消息定衰戴日北所直度分之晷差,满百为分,分满十为寸,各为每日晷差。”<sup>③</sup>按算理,此方法应为,已知节气气初戴日北度数及第一日戴日北度的变化量(第一日消息衰/100),从太阳天顶距与晷长对应表中查得相应晷差,为第一日晷差。同理可依次求出第二日、第三日……晷差。如欲直接求第 $n$ 日到气初的晷差,则可以气初到

① 见刘金沂,赵澄秋:《唐代一行编成世界上最早的正切函数表》,《自然科学史研究》1986,5(4)。

② 大衍历在相关术文中有:“南方戴日之下,正中无晷”之句,指的是北回归线处夏至正午太阳在天顶,此时晷影为0。从北回归线每向北一度(戴日之北),太阳就偏南一度,所以此处戴日之北度即等同于太阳天顶距。

③ 《旧唐书·历志三》。



(息减,消加)(8-53)

第  $n$  日夜刻 = 第  $n$  日夜半漏  $\times 2$ 第  $n$  日昼刻 = 100 刻 - 第  $n$  日夜刻

根据日出前二刻半为昼始,日没后二刻半为夜始,还可以做日出辰刻等项计算。

### 三、求每日黄道去极定数

某气第  $n$  日黄道去极定数

$$= \text{该气气初黄道去极度} \pm \sum_{i=1}^n \frac{\text{第 } i \text{ 日消息定衰}}{100}$$

(息减,消加)(8-54)

### 四、求每日距中度定数

某气第  $n$  日距中度定数

$$= \text{该气气初距中度} \pm \sum_{i=1}^n \frac{\text{第 } i \text{ 日消息定衰} \times 12386^{\text{①}}}{100 \times 16277}$$

(息加,消减)(8-55)

将太阳该日宿度与距中度定数相加,可得昏中星宿度,同理可得晓中星宿度。

### 五、求九服所在每气气初中暑常数<sup>②</sup>

这是利用太阳天顶距和暑长关系表、阳城各节气气初黄道去极度及任一纬度地区所测冬至或夏至日中影长,求该地区每气气初中暑常数的方法。现设所测为夏至影长,则算法步骤为:

① 由上述各公式可知,1 单位消息衰 =  $\frac{1}{480}$  刻 =  $\frac{1}{100}$  太阳赤纬度 =  $\frac{12386}{100 \times 16277}$  太阳赤经度。

② 参见刘金沂,赵澄秋:《唐代一行编成世界上最早的正切函数表》。

(1)以夏至影长在太阳天顶距和晷长关系表中查出相应戴日北度数,即为该地夏至太阳天顶距。

(2)将夏至、小暑、大暑……诸气阳城黄道去极度依次两两相减,得每相邻两气太阳去极度差,称为每气消息定数,这些值在任一纬度地区都是相同的。

(3)将(1)中求出的夏至太阳天顶距逐次加上(2)中求出的太阳去极度差(每气消息定数),得每气太阳天顶距,也即戴日北度。查表可得该纬度地各气气初中暑常数。

大衍历在这里还首次提到了戴日南,即北回归线以南晷影的求算方法。

## 六、九服所在昼夜漏刻

(1)用漏刻测出任一纬度地区冬至、夏至夜刻,二者相减,为冬至、夏至差刻。

$$\begin{aligned}\text{春分、秋分初日夜刻} &= \text{冬至夜刻} - \frac{\text{冬至、夏至差刻}}{2} \\ &= \text{夏至夜刻} + \frac{\text{冬至、夏至差别}}{2}\end{aligned}\quad (8-56)$$

(2)设所求节气距春分、秋分节气数为  $m$ , 则:

$$\begin{aligned}\text{所求节气初日夜刻数} &= \text{春分、秋分初日夜刻数} \\ &\pm \frac{\text{所求节气到二分太阳去极度差} \times \text{冬至、夏至差刻}}{\text{冬至、夏至太阳去极度差}} \\ &= \text{春分、秋分初日夜刻数} \pm \frac{\sum_{i=1}^m \text{第 } i \text{ 气消息定数} \times \text{冬至、夏至差刻}}{47.80}\end{aligned}$$

(春分前秋分后加,春分后秋分前减)(8-57)

次日夜刻数 = 初日夜刻数

$$\pm \frac{\text{当日消息定衰}^{\text{①}} \times \text{冬至、夏至差刻}}{47.80}$$

(息减,消加)(8-58)

余类推。

本节算例：

求阳城冬至后  $t=172.3/12=14.4417$  日的中晷常数、 $\frac{1}{2}$ 夜半漏、黄道去极度和距中星度。

先求得：

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \text{第 } i \text{ 日消息定衰(息)} \\ &= t \times \text{冬至初日消息衰} + \frac{t(t-1)}{2} \times \frac{\text{升降率}}{100} \\ &= 14.4417 \times 0.64 + \frac{14.4417 \times 13.4417}{2} \times \frac{78}{100} \\ &\approx 85 \end{aligned}$$

775

①求中晷常数。

按式(8-50)：

$$\begin{aligned} & \text{冬至初戴日北度} \\ &= \text{冬至初黄道去极度} - \text{极去戴日下度} \\ &= 115.20 - 56.825 = 58.375(\text{度}) \end{aligned}$$

冬至初到  $t$  日戴日北度的变化量为  $85/100=0.85$  度,从太阳天顶距和晷长关系表中可以查出  $58.375-0.85=57.525$  度到  $58.375$  度相应的晷差为：

$$0.3874 \times 0.475 + 0.4045 \times 0.375 = 0.3357(\text{尺})$$

按式(8-51)：

$$t \text{ 日中晷常数} = 12.7150 - 0.3357 = 12.3775(\text{尺})$$

① 此处应为消息定衰/480,大衍历术文疑有脱误。

②求  $t$  日夜半漏。

按式(8-53):

$$\begin{aligned} t \text{ 日夜半漏} &= \text{冬至初日夜半漏} - \sum_{i=1}^n \frac{\text{第 } i \text{ 日消息定衰}}{480} \\ &= 27 \frac{230}{480} - \frac{85}{480} = 27 \frac{145}{480} (\text{刻}) \end{aligned}$$

③求  $t$  日黄道去极度。

按式(8-54):

$$\begin{aligned} t \text{ 日黄道去极定数} \\ &= \text{冬至初黄道去极度} - \sum_{i=1}^n \frac{\text{第 } i \text{ 日消息定衰}}{100} \\ &= 115.2 - 85/100 = 114.35 (\text{度}) \end{aligned}$$

④求  $t$  日距中星度。

按式(8-55):

$$\begin{aligned} t \text{ 日距中度} &= \text{冬至初距中度} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\text{第 } i \text{ 日消息定衰} \times 12386}{100 \times 16277} \\ &= 82.27 + \frac{85 \times 12386}{100 \times 16277} = 82.91 (\text{度}) \end{aligned}$$

距冬至 14.4417 日是小寒时刻。本算例求出的夜半漏、黄道去极度和距中星度均与表 8-6 所列小寒相应值一致,但中晷常数与表中值不符,其差距主要应由太阳天顶距与晷长关系表的误差造成。据刘金沂等“唐代一行编成世界上最早的正切函数”一文的分析,该表系据若干点的观测编排而成,其误差随戴日北度的增大而增大。实际上,用晷漏中星表中各节气初黄道去极度求得其戴日北度,再以太阳天顶距与晷长关系表求出的中晷常数大多与表列值不符,越近冬至误差越大,这反映了大衍历上述两表的矛盾之处。



## 第六节 步交会术

本节数据有：

终数：827251322 秒，一交点月秒数。

交终日：27  $\frac{645 \frac{1322}{10000}}{3040}$  日，一交点月日数。

中日：13  $\frac{1842 \frac{5661}{10000}}{3040}$  日， $\frac{1}{2}$  交点月日数。

朔差日：2  $\frac{967 \frac{8678}{10000}}{3040}$  日，为朔望月日数与交点月日数之差。

望差日：1  $\frac{483 \frac{9339}{10000}}{3040}$  日， $\frac{1}{2}$  朔差日。

望数日：14  $\frac{2326 \frac{5000}{10000}}{3040}$  日， $\frac{1}{2}$  朔望月。

交限日：12  $\frac{1358 \frac{6322}{10000}}{3040}$  日，中日与望差日之差。

交率：343，见下。

交数：4369，交率/交数=交点月日数/交点年日数。

交秒法：10000。

日食和月食是朔与望发生在交点附近时产生的。所以朔、望时月亮至交点的时距(入交定日)是交食计算的基本量。同入交定日一样，月亮黄纬曾被当作判断交食发生的参照量之一，因此也被列入步交食一节。这两项内容之后，即为日食、月食的推算。

## 一、求入交定日

大衍历的人交定日术出自皇极历,其公式为:

$$\text{人交定日} = \text{人交泛日} \pm \text{太阳改正} \pm \frac{\text{交率}}{\text{交数}} \times \text{月亮改正}$$

(朏减, 朏加) (8-59)

式中太阳改正和月亮改正分别见于本章第三节小节一和第四节小节一。人交泛日是平朔、望时月亮到交点的时距,也即平朔、望到月过交点的时间。其求法见图 8-8。

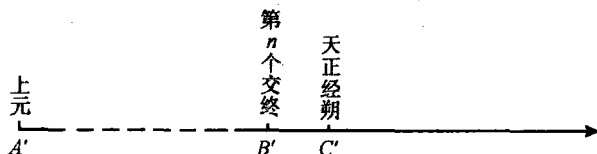


图 8-8 推算人交泛日示意

$$\begin{aligned} & \text{天正经朔人交泛日} (B'C') \\ &= \frac{(\text{朔积分} - m \times \text{终数}) \times \text{交秒法} - m' \times \text{终数}^{\text{①}}}{3040 \times \text{交秒法}} \\ &= \frac{\text{朔积分} \times \text{交秒法} - n \times \text{终数}^{\text{②}}}{3040 \times \text{交秒法}} \\ &= \frac{\text{朔积分} - n \times \text{交交终}(\text{分})}{3040} \end{aligned} \quad (8-60)$$

式中,

$$\text{朔积分} - n \times \text{交交终分} < \text{交交终分}$$

$$\text{次朔人交泛日} = \text{天正经朔人交泛日} + \text{朔差日} \quad (8-61)$$

$$\text{望人交泛日} = \text{朔人交泛日} + \text{望差日} \quad (8-62)$$

① 这是《旧唐书》所用公式,  $m$  为正整数, 括号内容表示满 10000 倍的交交终分去之,  $m'$  及下文的  $n$  也为正整数, 乘以终数, 意为满终数去之。

② 这是《新唐书》所用公式。

上两式满交终日时,均需减去交终日,其余朔、望入交泛日依此类推。

入交定日公式的几何解释见图 8-9。<sup>①</sup>

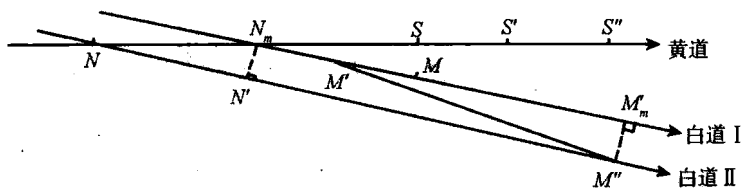


图 8-9 求入交定日示意图

图 8-9 中,白道 I、II 分别是平朔、定朔时的白道,它们之间的变化是黄白交点退行的反映; $S$ 、 $M$  为平朔时日、月平位置; $S'$ 、 $M'$  为此时日、月真位置; $S''$ 、 $M''$  为定朔时日、月真位置。现设  $n$  为交点退行速度,  $m$  为月亮运行速度,  $s$  为太阳运行速度, 则:

$$NM'' = NN' + N_m M' + M' M_m$$

其中

$$NN' \approx NN_m = -n \times \frac{M'M''}{m}$$

$$N_m M' = N_m M - M' M$$

$$M' M_m \approx M' M''$$

将上面第二、三、四式和  $M'M'' = (M'M + SS') \times \frac{m}{m-s}$ <sup>②</sup> 代入第一式,得:

$$NM'' = N_m M + \frac{m-n}{m-s} \times SS' + \frac{s-n}{m-s} \times M'M$$

① 有关研究参见刘金沂:“隋唐历法中入交定日术的几何解释”。

② 见本章第四节小节一,式(8-29)。

两边同除月亮相对交点速度 $(m-n)$ ,得:

$$\frac{NM''}{m-n} = \frac{N_{\pi}M}{m-n} + \frac{SS'}{m-s} + \frac{s-n}{m-n} \times \frac{M'M}{m-s}$$

即

$$\text{入交定日} = \text{入交泛日} + \text{太阳改正} + \frac{\text{交率}}{\text{交数}} \times \text{月亮改正} \quad (8-63)$$

$$\text{其中}(s-n)/(m-n) = \frac{\text{周天度}/(m-n)}{\text{周天度}/(s-n)} = \text{交率}/\text{交数}.$$

式(8-63)太阳改正和月亮改正取正号,表明它们符号的取法与定朔时相同,为朏减朒加。

由于平朔和定朔时间差不大,其间交点退行值很小,可以忽略不计,因此图 8-9 中的白道可被归并为一条,经过近似处理后,所得公式与(8-63)一致。

## 二、求月亮黄道纬度

表 8-7 是大衍历为求月亮黄道纬度给出的阴阳历表。该表将黄道从黄白降交点起平分为少阳、老阳、少阴、老阴四象,每象又平分为六爻,每爻 15 度。分别称为少阳初、少阳二……其后依次列出了每爻爻初月亮黄纬分值(阴阳积),此值除以 120 为每爻爻初月亮黄纬度值(月去黄道度),及相邻两爻月亮黄纬分值的一次差(加减率)。

以表 8-7 求每度月亮黄纬的术文为:

以其爻加减率与后爻加减率相减,为前差。又以后爻率与次后爻率相减为后差,二差相减,为中差。置所在爻并后爻加减率,半中差以加而半之,十五而一,为爻末率,因为后爻初率。每以本爻初、末率相减,为爻差,

表 8-7 阴阳历表<sup>①</sup>

老 阴	老 阳	老 阴	老 阳	老 阴	老 阳	少 阴	少 阳	少 阴	少 阳	少 阴	少 阳	少 阴	少 阳	交 目
上	五	四	三	二	初	上	五	四	三	二	初			加 减 率
减 百 八 十 七	减 百 七 十 一	减 百 四 十 七	减 百 一 十 五	减 七 十 五	减 二 十 七	加 二 十 七	加 七 十 五	加 百 一 十 五	加 百 四 十 七	加 百 七 十 一	加 百 八 十 七			
阴 阳 百 八 十 七	阴 阳 三 百 五 十 八	阴 阳 五 百 五	阴 阳 六 百 二 十	阴 阳 六 百 九 十 五	阴 阳 七 百 二 十 二	阴 阳 六 百 九 十 五	阴 阳 六 百 二 十	阴 阳 五 百 五	阴 阳 三 百 五 十 八	阴 阳 百 八 十 七	阴 阳 初			阴 阳 积
一 度 六 十 七 分	二 度 百 一 十 八 分	四 度 二 十 五 分	五 度 二 十 分	五 度 九 十 五 分	六 度 二 分	五 度 九 十 五 分	五 度 二 十 分	四 度 二 十 五 分	二 度 百 一 十 八 分	一 度 六 十 七 分	空			月 去 黄 道 度

十五而一，为度差。半之，以加減初率（少象減之，老象加之）为定初率。每以度差累加減之（少象以差減，老象以差加），各得每度加減定分。乃循积其分，满百二十为度，各为月去黄道度数及分。（其四象初爻无初率，上爻无末率，皆倍本爻加減率，十五而一，所得，各以初、末率減之，皆互得其率）<sup>②</sup>

设文中阴阳积为  $f$ ，加減率的绝对值为  $\Delta f$ ，则：

$$\text{前差} = |\Delta f_1 - \Delta f_2| = \Delta^2 f_1$$

① 《新唐书·历志四下》。

② 《新唐书·历志四下》。

$$\text{后差} = |\Delta f_2 - \Delta f_3| = \Delta^2 f_2$$

$$\text{中差} = |\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_2| = \Delta^3 f$$

$$\text{所在爻爻末率} = \text{后爻初率}$$

$$= \frac{1}{15 \times 2} \left( \Delta f_1 + \Delta f_2 + \frac{\Delta^3 f}{2} \right)$$

$$\text{所在爻爻初率} = \text{前爻末率}$$

$$= \frac{1}{15 \times 2} \left( \Delta f_0 + \Delta f_1 + \frac{\Delta^3 f}{2} \right)$$

$$\text{度差} = \frac{\text{爻差}}{15}$$

$$= \frac{|\text{所在爻爻初率} - \text{所在爻爻末率}|}{15}$$

$$= \frac{|\Delta f_0 - \Delta f_2|}{15^2 \times 2} \quad (8-64)$$

$$\text{定初率} = \text{所在爻爻初率} \pm \frac{1}{2} \text{度差}$$

(少象减, 老象加) (8-65)

上述推导定初率的思路与刘焯皇极历求每日迟速数术一致, 所不同的是爻末率和爻初率的求法。产生这一不同的原因在于皇极历日躔表是二次差相等, 三次差为 0。而大衍历月亮纬度表是三次差相等, 四次差为 0。后者完全按皇极历的方法计算不能使前爻末率等于后爻初率, 调整之后, 加减率的连续性才能得到保证。<sup>①</sup>

定初率是每爻第一度的加减定分, 其后有:

$$\text{每爻第 } n \text{ 度的加减定分}(C_n)$$

$$= \text{定初率} \pm (n-1) \text{度差}$$

(少象减, 老象加) (8-66)

<sup>①</sup> 参见王荣彬:《中国古代历法中的插值法构建原理》,《中国古代数理天文学探析》,第 284 页。

每爻第  $n$  度的月亮纬度

$$= (\text{所在爻爻初阴阳积} \pm \sum_{i=1}^n C_i) / 120 \quad (8-67)$$

以上法求月亮黄纬首先需知所给时刻月亮入交度数,大衍历因此列出了计算朔望夜半月亮入交度的公式,其式为:

$$\begin{aligned} & \text{定交初日夜半入转日及余} \\ &= \text{朔望夜半入转日及余} - \text{朔望夜半入交定日及余} \quad (8-68) \\ & \quad \text{朔望夜半入阴阳历度数} \\ &= \left( \frac{\text{朔望夜半入转余} \times \text{其日转定分}}{\text{通法} \times \text{转法}} \right. \\ & \quad \left. + \text{朔望夜半入转日之转积度} \right) \\ & \quad - \left( \frac{\text{定交初日夜半入转余} \times \text{其日转定分}}{\text{通法} \times \text{转法}} \right. \\ & \quad \left. + \text{定交初日夜半入转日之转积度} \right) \quad (8-69) \end{aligned}$$

这一方法比较繁琐,方法本身也存在问题。<sup>①</sup> 所以后世历法多将朔望入交定日乘月平均速度,直接得出定朔望时刻月亮入交度数。

### 三、日食预报

隋代前后,中国历法在推算日食时开始考虑视差的影响。视差是从两个地点观测同一天体时出现的角度差。前述日、月运动计算依据的基本量都是地面长期观测的统计平均值,等于消除了各向误差之后,日、月相对地心的位置。而交食观测只能在地面进行,因此视位置与计算位置之间存在的视差将会影响其结果。

<sup>①</sup> 例如,按其算理,两式中“定交初日夜半入转”之“初日夜半”当为多余的文字。第二式中“转定分”当为“转分”。

太阳视差值很小,影响日食的主要是月亮视差。根据现代分析<sup>①</sup>,当设月亮天顶距为 $z$ ,视差为 $H$ ,月球地平视差为 $H_0$ 时,有:

$$H = H_0 \sin z \quad (8-70)$$

再设观测地纬度为 $\varphi$ ,月球赤纬及时角分别为 $\delta$ 和 $h$ ,又有:

$$\cos z = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos h \quad (8-71)$$

日食时,日、月位置可近似视为相等。所以 $\varphi$ 值确定后,月亮视差应是太阳时角和赤纬(节气)的函数,它会改变月亮到交点距离,进而影响食限、食甚时刻及食分等的设置和求算。对于上述影响,皇极、麟德等历均有初步的经验性改正,大衍历则极大地完善了这些改正。

### (一)判断合朔时月亮是否入食限

#### 1. 食限变动的原理

食限是朔、望时是否发生交食的判据,通常以朔、望时月距交点度数或月亮走到交点所需日分来表示。早期中国历法的日食食限约在15度左右。合朔发生在此度数内即有日食。6世纪,张子信觉察到月在黄道南北对日食会产生影响。皇极、麟德等历将这一发现引入历法后,用文字叙述的形式依节气 and 时角对月在黄道南北的食限进行了经验性调整,所得黄道南食限小于黄道北食限<sup>②</sup>。其中原理,可以用下面三图作出解释。

图8-10中,从地心看到的是月亮的计算位置,从地面看到的是视位置,计算位置与视位置之差 $\Delta z$ 为视差,此图显示出视差总是使月亮位置沿地平经圈降低,据此我们可以画出月在黄道南北时视差影响其去交距离的示意图。

<sup>①</sup> 戴内清:《隋唐历法史之研究》,第107页;陈遵妫:《中国天文学史》第三册,第769页。

<sup>②</sup> 参见本书第一章第十节。



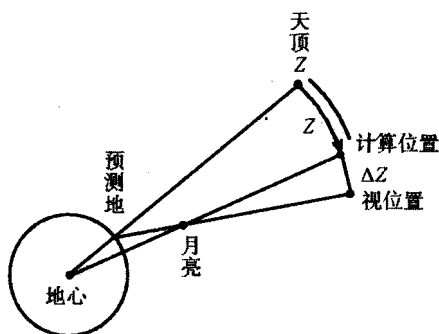


图 8-10 月亮视差示意图

图 8-11 中,  $M$ 、 $M'$  分别代表月亮的计算位置和视位置;  $N$ 、 $N'$  代表白道及视白道与黄道的交点。当月在黄道北时, 视去交  $M'N'$  小于计算去交  $MN$ , 且有  $M'N' = MN - ML$ , 月在黄道南时,  $M'N' > MN$ , 且  $M'N' = MN + M'L'$ , 两式中  $ML$  和  $M'L'$  是月亮视差在白道方向的投影, 下面简称视差投影。

785

虽然去交距离有计算去交和视去交之分, 但无论对地心还是地面, 食限都应是同一个值, 如设此值为  $A$ , 那么对于地面观测者而言, 日食发生的条件应为:

视去交  $< A$

计算去交  $\pm$  视差投影  $< A$  (黄道北减, 黄道南加)

计算去交  $< A \pm$  视差投影

(黄道北加, 黄道南减) (8-72)

上式的意义在于, 如果地面上的观测者像皇极历、麟德历及大衍历一样, 以计算去交判断交食是否发生, 其所用食限就应是一随节气和太阳时角变化的量, 这个量在黄道北大, 在黄道南小。

## 2. 大衍历合朔时月入食限判断法

在大衍历中, 一行首次明确提出了阴历食限和阳历食限的概念。他将冬至时黄道以北的食限定义为阴历食限, 冬至时黄道以

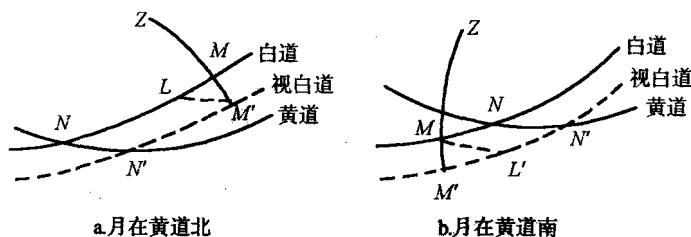


图 8-11 月在黄道南北视差影响去交距离示意图

南的食限定义为阳历食限,这些食限以月亮从一特定距离走到交点所需日分表示。其中,

阴历:食限=3524 日分(14.67 度)

或限=3659 日分(15.23 度)

阳历:食限=136 日分(0.57 度)

或限=974 日分(4.05 度)

上文中或限是可食可不食之限,所给日分乘以  $11/2643$  为度<sup>①</sup>。

为了求得不同节气的食限,大衍历列出了冬至食限与其他节气食限之差(也是冬至食差与其他节气食差之差,见下)的表格。称为差积表(见本书第一章第十节表 1-27)。利用差积表,以与步日躔类同的不等间距二次差内插法[见式(8-12),不过在涉及符号时改为冬至后加,夏至后减]求出二十四气中任一日的差积定数,则:

该日日食定限=阴(阳)历食限±当日差积定数

(阴历减,阳历加)(8-73)

对任一定朔日,只要知其在哪一节气的第几日,即可以上法

①  $11/2643$  为月平均速度,单位为度/日分。 $\frac{11}{2643} \times 3040 = 12.6523$ (度/日),应是一近似值。

得出该朔日的日食定限。

在给出冬至食限的同时,大衍历还给出了冬至食差,其值为1275日分(5.31度),并有:

$$\text{任一食定差} = \text{冬至食差} \pm \text{当日差积定数} \\ (\text{阴历减,阳历加}) \quad (8-74)$$

由于存在阴历、阳历两种食定限,所以大衍历认为在判断合朔月亮是否入食限前,需先判定选用哪一种食限。判断的方法是,当以入交定日(计算去交)和上元时月过降交点得出月在黄道北,而且去交定分(入交定日化为距最近交点之日分值) > 食定差时,为阴历食;月在黄道北,去交定分 < 食定差时,类同阳历食;月在黄道南,为阳历食。阴历食用阴历食定限,阳历食及类同阳历食用阳历食定限,此时只要

$$\text{去交定分} < \text{食定限} \quad (8-75)$$

即有日食发生。上式与式(8-72)的分析结果是一致的,缺陷是食定限没有计入太阳时角的影响。<sup>①</sup>

从以上选择食限的过程可以推知,食定差是计算去交的改变值,它们应相当于月亮视差在白道上的投影,即

$$\text{去交定分} \pm \text{食定差} = \text{视去交} \\ (\text{黄道北减,黄道南加}) \quad (8-76)$$

而大衍历实际是以月亮视位置为判断标准,月亮视位置在黄道北,为阴历食;视位置在黄道南,为阳历食。式(8-76)在后面的食分计算中还要用到。

如果将式(8-75)两边加减食定差,并设视食限为常数,则可得:

$$\text{视去交} < \text{食定限} \pm \text{食定差} \quad (\text{阴历减,阳历加})$$

<sup>①</sup> 大衍历可能只考虑了正午时的情形。参见戴内清:《隋唐历法史之研究》,第110~111页;陈遵妫:《中国天文学史》第三册,第771页。

不等式右侧之常数可以利用冬至差积为零求出,这样上式变为:

$$\text{视去交} < \text{阴(阳)历食限} \pm \text{冬至食差} \\ (\text{阴历减,阳历加}) \quad (8-77)$$

所得阴历视白道上的固定食限为 2249 日分(9.36 度),阳历视食限为 1411 日分(5.87 度)。这可能就是宣明历改进日食判断的思路。从宣明历以后,中国历法即直接采用视去交和视食限,舍弃了大衍历所用的变动的食限。不过其阴历、阳历有两个不同的食限,这一点是不正确的。<sup>①</sup>

## (二)求日食食分

$$\begin{aligned} \text{阴历食分} &= 15 - \frac{(\text{去交定分} - \text{食定差}) - 104}{143} \\ &= 15 - \frac{\text{视去交} - 104}{143} \end{aligned} \quad (8-78)$$

式中 104 称为即限,当视去交  $\leq 104$  时,为日全食。其

$$\begin{aligned} \text{分母 } 143 &= \frac{\text{阴历食限} - \text{冬至食差} - 104}{15} \\ \text{阳历食分} &= 15 - \frac{(\text{去交定分} + \text{食定限}) - 60}{90} \\ &= 15 - \frac{\text{视去交} - 60}{90} \end{aligned} \quad (8-79)$$

式中 60 分为即限。

$$\text{分母 } 90 = \frac{\text{阳历食限} + \text{冬至食差}}{15} - \frac{60}{15}$$

<sup>①</sup> 参见戴内清:《隋唐历法史之研究》,第 111 页;陈遵妫:《中国天文学史》第三册,第 771 页。

### (三)日食方位

其术文曰：

月在阴历，初起西北，甚于正北，复于东北。月在阳历，初起西南，甚于正南，复于东南。其食十二分以上，皆起正西，复于正东（此亦据南方正午而论之）<sup>①</sup>。  
这是定性描述。

### (四)食甚时

$$\text{食甚时刻} = \text{定期小余} \pm \frac{\text{去交定分} \times \text{交率}}{20 \times \text{交数}}$$

（月道与黄道同名加，异名减）<sup>②</sup>（8—80）

上式中第二项为时差经验改正，其值与视差无关，显然有些问题。

789

### (五)日食持续时间(定用刻数)

$$\text{定用刻数} = \text{泛用刻率} \left( 1 \pm \frac{\text{其日入转损益率}}{\text{通法}} \right)$$

（朏：损加益减；朏：损减益加）（8—81）

泛用刻率见表 8—8。

### (六)计算不同纬度地区的日食(九服所在日食)

前述计算均以阳城为准。由于月亮视差随地理纬度而变，所以计算不同纬度地区的日食需重新求其视差量，这包括了两个步骤：求所在地冬至、夏至及春分、秋分食差；求所在地每日食定差。

① 《旧唐书·历志三》。

② 同名指月在黄道北(南)时，日在赤道北(南)。异名类推。

表 8-8 泛用刻率表

食分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	阴历食： 去交定 分—食 定差 >70	阴历食： 去交定 分—食 定差 <15	同阳历 食：食定 差—去 交定分 <20	同阳历 食：食定 差—去 交定分 <4
泛用 刻率	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	20	20.5	21	$21\frac{1}{4}$

## 1. 求所在地冬至、夏至和春分、秋分食差

先测所在地冬至、夏至及春分、秋分定日午正八尺表影长，与步晷漏术中阳城每日中晷常数比较，取相同者，则阳城当日食差即为所在地冬至、夏至或春分、秋分食差。

由于中晷长短相同太阳天顶距就相同，这一方法是符合视差原理的。

## 2. 求所在地每日食定差

该段术文为：

以夏至差减春分差，以春分差减冬至[差]，各为率。并二率，半之，六而一，为夏率。二率相减，六而一，为总差。置总差，六而一，为气差。半气差，以加夏率，又以总差减之，为冬率（冬率即冬至率）。每以气差加之，各为每气定率。乃循积其率，以减冬至蚀差，各得每气初日蚀差（求每日，如阳城法求之，若戴日之南，当计所在地，皆反用之。）<sup>①</sup>

设，冬至食差—春分食差= $\Delta f_1 > 0$ ；春分食差—夏至食差=

① 《新唐书·历志四下》，方括号内为脱文。

$\Delta f_2 > 0$ ; 且有,  $\Delta f_2 > \Delta f_1$ ①, 则:

$$\text{夏率} = \frac{1}{6} \times \frac{\Delta f_1 + \Delta f_2}{2}$$

$$\text{总差} = \frac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{6}$$

$$\text{气差} = \frac{\Delta f_2 - \Delta f_1}{6^2}$$

$$\begin{aligned} \text{冬率} &= \text{夏率} - \text{总差} + \frac{\text{气差}}{2} \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{\Delta f_1 + \Delta f_2}{2} + \frac{1}{6} \times (\Delta f_1 - \Delta f_2) \\ &\quad - \frac{1}{6^2} \times \frac{\Delta f_1 - \Delta f_2}{2} \textcircled{2} \end{aligned} \quad (8-82)$$

这是一个等间距二次差内插式, 所得冬率相当于冬至的增损差(见本书第一章表 1-27), 其后有:

$$\begin{aligned} \text{第 } n \text{ 气定率(增损差)} &= \text{冬率} + (n-1) \text{气差} \\ &\quad (n=1, 2, \dots, 12) \textcircled{3} \end{aligned} \quad (8-83)$$

$$\begin{aligned} \text{每气初日蚀差} &= \text{冬至蚀差} - \sum_{i=1}^n \text{第 } i \text{ 气定率} \\ &\quad (n=1, 2, \dots, 12) \end{aligned} \quad (8-84)$$

式(8-84)中的第二项相当于各气的差积, 此式已直接求出每气气初的食定差, 每日食定差则可以不等间距二次差内插法求得④。这样, 在阳城判断将有日食发生后, 可以用九服食差算出各地不同的食分。

大衍历在这一节还首次提到了戴日之南(北回归线之南)日

① 这些假设适用于月在黄道北。

② 参见王应伟:《中国古历通解》。

③ 此式可用于求前 12 节气的增损差, 后 12 节气增损差应与前 12 节气数值对称, 符号相反。下一式之蚀差, 则为数值对称, 符号相同。

④ 上述算法仅适用于月在黄道北。月在黄道南可依此类推。

食的求算。

#### 四、月食预报

月食是由于月亮进入地影而产生,这一现象从地球上任一点观测都是相同的,所以月食与月亮视差无关,其计算也相对简单得多。

##### (一)判断是否入食限

大衍历给出的月食发生的判定条件是:

$$\text{望时月在交后:入交定日} < \text{望差} \quad (8-85)$$

$$\text{望时月在交前:入交定日} > \text{交限} \quad (8-86)$$

从望差  $\times 3040 \times \frac{11}{2643}$  可算得月食食限  $= 14.67$  度。上两式适

用于月在黄道南。月在黄道北时,式中入交定日应换为入交定日—中日。

##### (二)月食食分

去交定分  $\leq 779$ :

$$\text{月食食分} = 15$$

去交定分  $> 779$

$$\begin{aligned} \text{食分} &= \frac{\text{望差(分)} - \text{去交定分}}{183} \\ &= \frac{3523.9339 - \text{去交定分}}{183} \quad (8-87) \end{aligned}$$

##### (三)月食方位

与日食相同,这一项内容也是定性描述:



月在阴历,初起东南,甚于正南,复于西南。月在阳历,初起东北,甚于正北,复于西北。其蚀十二分以上者,起于正东,复于正西。(此皆据南方正午而论之,若蚀于余方者,各随方面所在,准此取正,而定其蚀起复也。)<sup>①</sup>

#### (四)食甚时刻

$$\text{食甚时刻} = \text{定望小余} \pm \frac{\text{去交定分} \times \text{交率}}{20 \times \text{交数}}$$

(月道、黄道同名加,异名减)(8-88)

以第二节中之发敛加时术可求真辰刻。

#### (五)月食持续时间

月食求定用刻数公式与日食相同,其泛用刻率见表8-9。

表8-9 月食泛用刻率

食分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	去交定分 <520	去交定分 <260
泛用 刻率	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	19	20	20.5	21

本节算例:

1. 计算开元十二年七月朔日食

(1) 求开元十二年天正经朔入交泛日( $B'C'$ )。

按本节式(8-60):

$$B'C' \Rightarrow \frac{\text{朔积分} - n \times \text{交终分}}{3040}$$

<sup>①</sup> 《旧唐书·历志三上》。

$$= \frac{1199255781 \times 89773^{①} - n \times 82725.1322}{3040}$$

其中朔积分  $-n \times$  交终分  $<$  交终分, 由此求得  $n$   
 $=1301427829$ 。

所以,

$$B'C' = \frac{24929.0062}{3040} = 8.200331(\text{日})$$

(2) 求开元十二年七月平朔入交泛日。

$$\begin{aligned} \text{七月平朔入交泛日} &= \text{天正经朔入交泛日} + 8 \times \text{朔差日} \\ &= 26.747352(\text{日}) \end{aligned}$$

(3) 求七月朔入交定日。

按本节式(8-59):

$$\begin{aligned} \text{七月朔入交定日} &= \text{入交泛日} - \text{太阳改正}^{②} - \frac{\text{交率}}{\text{交数}} \times \text{月亮改正}^{③} \\ &= 26.747352 - 0.116779 - \frac{343}{4369} \times 0.397149 \\ &= 26.599394(\text{日}) \end{aligned}$$

(4) 判断是否入食限。

据上元从降交点起算及七月朔入交定日  $= 26.599394$  日可知月在黄道北。从第三节算例(1)和第四节算例(1)又知七月定朔在大暑后第六日, 以差积表和式(8-12)<sup>④</sup>求出当日差积定数为 303.405085, 据式(8-74):

$$\begin{aligned} \text{七月朔食定差} &= \text{冬至食差} - \text{当日差积定数} \\ &= 1275 - 303.405085 \end{aligned}$$

① 见本章第一节算例(2)。

② 见本章第三节算例(1)。

③ 见本章第四节算例(1)。

④ 参见本节关于差积定数术法的说明。

$$=971.594915$$

因为,

$$\begin{aligned}\text{去交定分} &= (\text{交终日} - \text{入交定日}) \times 3040 \\ &= 1862.97444 > \text{食定差}\end{aligned}$$

所以,本例应用阴历食限。

按式(8-73):

所求

$$\begin{aligned}\text{食定限} &= \text{阴历食限} - \text{当日差积定数} \\ &= 3524 - 303.405085 \\ &= 3220.594915 (\text{日分})\end{aligned}$$

因为,去交定分 < 食定限,所以,当有日食发生。

(5)求日食食分。

据式(8-78):

$$\begin{aligned}\text{日食食分} &= 15 - \frac{(\text{去交定分} - \text{食定差}) - 104}{143} \\ &= 15 - \frac{1862.97444 - 971.594915 - 104}{143} \\ &= 9.49385\end{aligned}$$

795

对于此次日食,《大衍历议·日食议》中记道:“开元十二年七月戊午朔,于历当食半强,自交趾至于朔方,候之不蚀。”<sup>①</sup>其计算结果与本算例一致。据奥泊尔子《日月食典》,这一天确有日食发生,但食带从东半球高纬地区到西半球,没有经过中国<sup>②</sup>。

## 2. 求开元十二年七月望月食

(1)求开元十二年七月望入交泛日。

① 《新唐书·历志三下》。

② Oppolzer(1841-1886): Canon of Eclipses, Dover Publications, Inc. p186. 本次日食编号为 4614, 发生在 724 年 7 月 25 日 0 时 8.9 分(世界时), 食带见该书书后所附 Chart 93。

据式(8-62):

$$\begin{aligned}\text{七月望入交泛日} &= \text{七月朔入交泛日} + \text{望数日} - \text{交终日} \\ &= 14.300434(\text{日})\end{aligned}$$

(2)求七月望入交定日。

据式(8-59):

$$\begin{aligned}\text{入交定日} &= \text{入交泛日} - \text{太阳改正}^{\text{①}} + \text{月亮改正} \times \frac{\text{交率}^{\text{②}}}{\text{交数}} \\ &= 14.300434 - 0.145828 + 0.371762 \times \frac{343}{4369} \\ &= 14.183792(\text{日})\end{aligned}$$

(3)判断是否入食限。

此例是月在黄道北,望时月在交后,月到交点日数=(入交定日-中日),小于望差,所以将有月食发生。

(4)求食分。

按式(8-87):

$$\begin{aligned}\text{食分} &= \frac{\text{望差(分)} - \text{去交定分}}{183} \\ &= \frac{3523.9339 - (\text{入交定日} - \frac{1}{2} \text{交终日}) \times 3040}{183} \\ &= \frac{3523.9339 - 1756.1624}{183} = 9.66\end{aligned}$$

(5)求食甚时刻。

据式(8-88):

$$\text{食甚时刻} = \text{定望小余}^{\text{③}} - \frac{\text{去交定分} \times \text{交率}}{20 \times \text{交数}}$$

① 见本章第三节算例(2)。

② 见本章第四节算例(2)。

③ 见本章第四节算例(2)。

$$\begin{aligned}
 &= 2510.33776 - \frac{1756.1624 \times 343}{20 \times 4369} \\
 &= 2503.444149 (\text{日分}) \\
 &= 0.823501 (\text{日})
 \end{aligned}$$

这一时间约为阳城地方时晚 7 时 46 分。

(6) 求月食持续时间。

据本节四泛用刻率表, 食分为 9.66 时, 泛用刻率为 13.66 刻, 据式(8-81):

$$\begin{aligned}
 \text{定用刻数} &= \text{泛用刻率} \left( 1 - \frac{\text{第 9 日}^{\text{①}} \text{入转损益率}}{3040} \right) \\
 &= 13.66 \left( \frac{1-106}{3040} \right) \\
 &= 13.183697 (\text{刻})
 \end{aligned}$$

这一时间相当于 3 小时 10 分。

在奥泊尔子的《日月食典》中, 此次月食编号为 2989, 发生时间为公元 724 年 8 月 9 日<sup>②</sup>世界时 12 时 28 分(约为阳城地方时晚 8 时), 为大食分偏食。交食持续时 3 小时 2 分。

与本算例计算结果相同的是《唐会要》记开元十二年癸酉望发生月食。《旧唐书·玄宗本纪上》则记其发生于七月壬申, 而且是月全食, 同大衍历和《日月食典》出入很大。

### 3. 求开元十七年十月戊午朔日食

对此次日食, 《旧唐书·玄宗本纪上》记曰: “冬十月戊午朔日有食之, 不尽如钩。”《新唐书·天文二》中有: “十七年十月戊午朔, 日有食之, 不尽如钩, 在氐九度。”而据《日月食典》(第 4626 号), 这是一次日全食, 全食带经过中国北部和中部, 发生在

① 七月朔入转日, 见第四节算例(2)。

② 癸酉日。

729年10月27日<sup>①</sup>世界时1时12.9分<sup>②</sup>(约为阳城地方时8时45分)。下面是依大衍历方法所做的计算。

(1)求开元十七年天正冬至大、小余和天正经朔大、小余。

$$\begin{aligned}
 \text{天正冬至大、小余} &= \left[ \frac{\text{中积分}}{3040} / 60 \right]_R \\
 &= \left[ \frac{96961745 \times 1110343}{3040} / 60 \right]_R \\
 &= \frac{96961745 \times 1110343}{3040} - 590245585 \times 60 \\
 &= 40.965461(\text{日})
 \end{aligned}$$

因为,

$$\begin{aligned}
 \text{朔积分} &= \text{中积分} - \text{归余之挂} \\
 &= n \times 89773 \\
 &= 1199255843 \times 89773
 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}
 \left[ \text{天正经朔大小余} = \frac{\text{朔积分}}{3040} / 60 \right]_R \\
 &= \frac{1199255843 \times 89773}{3040} - 590245585 \times 60 \\
 &= 29.486513(\text{日})
 \end{aligned}$$

(2)求十月平朔大、小余和十月朔所在定气大、小余。

$$\begin{aligned}
 \text{十月平朔大、小余} &= [\text{天正经朔大、小余} \\
 &\quad + 11 \times \text{四象之策} / 60]_R \\
 &= 354.323026 - 5 \times 60 \\
 &= 54.323026(\text{日})
 \end{aligned}$$

根据中气固定于特定月份的原则,十月朔所在气应为霜降或

① 戊午日。

② 见 Opplzer:《Canon of Eclipses》,第186页及书后第93章。

立冬,按上面三式的结果,可以判定开元十七年十月朔所在定气为霜降。

$$\begin{aligned}\text{霜降平气大、小余} &= [\text{天正冬至大、小余} \\ &\quad + 20 \times \text{三元之策} / 60]_R \\ &= 345.335801 - 5 \times 60 \\ &= 45.335801(\text{日})\end{aligned}$$

据式(8-13):

$$\begin{aligned}\text{霜降定气大、小余} &= \text{霜降平气大、小余} + \text{该气先后数} \\ &= 45.335801 + 6564 / 3040 \\ &= 47.495012(\text{日})\end{aligned}$$

(3)求十月朔太阳改正。

$$\begin{aligned}\text{十月平朔入霜降日算及余} &= 54.323026 - 47.495012 \\ &= 6.828014(\text{日})\end{aligned}$$

对于霜降这一节气,  $\Delta f_1 = 73$ ,  $\Delta f_2 = 104$ ,  $t_1 = 178.8 / 12 = 14.9$ ,  $t_2 = 177.1 / 12 = 14.758333$ ,  $n = 6.828014$ , 朏朧积 = 491 (朏), 将以上数值代入式(8-8)、式(8-9)和式(8-15), 得:

$$\text{日差} = 0.144818$$

$$\text{气初定率} = 3.748022$$

$$\text{太阳改正(朏)} = \text{霜降朏朧积}$$

$$\begin{aligned}& - \left[ n \times \text{气初定率} + \frac{n(n-1)}{2} \text{日差} \right] \\ &= 462.527027(\text{日分}) \\ &= 0.152147(\text{日})\end{aligned}$$

(4)求十月朔月亮改正。

据式(8-20):

$$\begin{aligned}& \text{开元十七年天正经朔入转} \\ &= \frac{\text{朔积分} - n \times \text{转终(分)}}{3040}\end{aligned}$$

$$= \frac{1199255843 \times 89773 - 1285256677 \times 83765.9875}{3040}$$

$$= 17.686007(\text{日})$$

十月平朔入转

$$= \text{天正经朔入转} + 11 \times \text{转差日} - \text{转终日}$$

$$= 11.867306(\text{日})$$

即第12日,入转余/通法为0.867306,设入转余/通法= $t$ ,由于第12日损益率为前少,所以有 $\Delta f_1 = 229$ , $\Delta f_2 = 189$ ,将以上三值代入式(8-24),得转率=196.311348。

将 $t_0 = \text{转率}/3040 = 0.064576$ 和上述各量代入式(8-25),得 $A' = 15.820071$ 。

据式(8-26):

$$\text{转定率} = \text{转率} + A' = 212.131419(\text{日分})$$

据式(8-28):

$$\text{月亮改正(朏)} = \text{第12日朏朒积} - \text{转定率}$$

$$= 727 - 212.131419$$

$$= 514.868581(\text{日分})$$

$$= 0.169365(\text{日})$$

(5)求十月定期大、小余。

按式(8-31):

十月定期大、小余

$$= \text{十月平朔大、小余} - \text{太阳改正} + \text{月亮改正}$$

$$= 54.323026 - 0.152147 + 0.169365$$

$$= 54.340244(\text{日})$$

即戊午日,小余=0.340244 $\times$ 3040=1034.34176(日分)。

(6)求十月朔入交定日。

按式(8-60):

开元十七年天正经朔入交泛日



$$= \frac{\text{朔积分} - n \times \text{交终分}}{3040}$$

$$= \frac{1199255843 \times 89773 - n \times 82725.1322}{3040}$$

$$= \frac{1199255843 \times 89773 - 1801427896 \times 82725.1322}{3040}$$

$$= 15.878667(\text{日})$$

$$\begin{aligned} \text{十月朔入交泛日} &= \text{天正经朔入交泛日} + 11 \times \text{朔差日} - \text{交终日} \\ &= 14.168605(\text{日}) \end{aligned}$$

据式(8-59):

$$\begin{aligned} \text{十月朔入交定日} &= \text{十月朔入交泛日} - \text{太阳改正} \\ &\quad + \frac{\text{交率}}{\text{交数}} \times \text{月亮改正} \\ &= 14.029754(\text{日}) \end{aligned}$$

(7) 判断是否入食限。

根据入交定日和上元时月过降交点可知此例为月在黄道北,

据式(8-74):

$$\begin{aligned} \text{食定差} &= \text{冬至食差} - \text{霜降第7日差积定数} \\ &= 1275 - 57.653365 \\ &= 1217.346635(\text{日分}) \end{aligned}$$

因为,

$$\begin{aligned} \text{去交定分} &= (\text{入交定日} - \frac{1}{2} \text{交终日}) \times 3040 \\ &= 1287.88688 > \text{食定差} \end{aligned}$$

所以,当用阴历食定限。

据式(8-73):

所求

$$\begin{aligned} \text{食定限} &= \text{阴历食限} - \text{霜降第7日差积定数} \\ &= 3524 - 57.653365 \end{aligned}$$

$$=3466.346635(\text{日分})$$

由于去交定分 < 食定限, 所以有日食发生。

(8) 求食分。

据式(8-78):

$$\text{食分} = 15 - \frac{(\text{去交定分} - \text{食定差}) - 104}{143}$$

因为(去交定分 - 食定差) = 视去交 < 104, 此次日食为全食。

(9) 求食甚时刻。

据式(8-80):

$$\begin{aligned}\text{食甚时刻} &= \text{定期小余} - \frac{\text{去交定分} \times \text{交率}}{20 \times \text{交数}} \\ &= 1035.32976 - \frac{1287.88688 \times 343}{20 \times 4369} \\ &= 1030.27431(\text{日分}) = 0.338906(\text{日})\end{aligned}$$

此值相当于阳城地方时 8 时 8 分。

上述计算结果与《日月食典》和实测记录均很接近。

## 第七节 步五星术

本节数据:

终率: 五星会合周期所含日分。

终日: 一会合周期所含日数。

中合日:  $\frac{1}{2}$  终日, 用于内行星, 为晨合和夕合间隔的时间。

变差算: 五星近日点相对冬至点的每年进动分值<sup>①</sup>。

象算: (策实 + 变差算) / 4。

① 陈美东:《古历新探》,第 412 页。

爻算:象算/6。

辰法:760,本节各日余、度余之分母。

秒法:100。

微分法:96。

五星的运动规律较日、月更为复杂。从近代天文学的角度看,如果设地球为参照系,那么行星的运行是太阳绕地球、行星又绕太阳两种运动的合成。此时呈现在地球观测者眼中的,是由合、顺行、留、退行,及对称的退行、留、顺行、合等动态组成的一系列循环往复的运动<sup>①</sup>,这也是中国古代最早认识的五星周期运动,其平均观测值以五星动态表的形式表现在历法中。此外,由于行星绕日和太阳绕地均为椭圆而产生的两种中心差,在大衍历中分别以五星爻象历和文字叙述的形式出现。用两项中心差对五星动态表做出中心差的经验改正,可得出所求行星会合周期的真实动态表。以真实动态表为基础,即可进行行星位置等项计算。

803

### 一、五星动态表

以木星为例(见表8—10)。

表8—10中,“变行日中率”为木星各动态段平均运行时间;“变行度中率”为各段平均运行度数;设各段运行都遵循等差级数规律,则“差行损益率”为各段等差运动的公差;“变行度常率”是在该段平均运行时间内,行星如均匀顺行应走过的度数;也可以理解为木星相对于其近日点的平行度。变行乘、除数的解释见下文。

<sup>①</sup> 这是指外行星,内行星一周期内有两次合。

表 8-10 木星动态表<sup>①</sup>

变行目	合后伏	前顺	前留	前退	后退	后留	后顺	合前伏
变行日中率(日)	17 $\frac{332}{760}$	112*	27	43	43	27	112	17 $\frac{333^*}{760}$
变行度中率(度)	3 $\frac{332^*}{760}$	18 $\frac{656^*}{760}$		5 $\frac{369}{760}$	5 $\frac{369}{760}$		18 $\frac{656^*}{760}$	3 $\frac{333}{760}$
差行损益率(分)	$\frac{9}{2}$	$-\frac{6}{5}$		$\frac{11}{6}$	$-\frac{11}{6}$		$\frac{6}{5}$	$-\frac{9}{2}$
变行度常率(度)	1 $\frac{357}{760}$	9 $\frac{337^*}{760}$	2 $\frac{210^*}{760}$	3 $\frac{475}{760}$	3 $\frac{475}{760}$	2 $\frac{210}{760}$	9 $\frac{337}{760}$	1 $\frac{358}{760}$
变行乘数	350	350*	267*	470	510	270*	267	350
变行除数	280	280	221	403	467	222	227	280

上述动态表表示的是平均运动,对任一合会周期,大衍历先取动态表之起点,也就是合点,做两项中心差改正,再从合点出发,对整个表做出中心差改正。

## 二、对合点进行两项中心差改正,并求出定合日及其黄经

### (一)五星爻象历

为求得行星中心差,大衍历首次给出了完整的五星爻象历表,此表将一近点周(策实+变差算)平分为少阳、老阳、少阴、老阴共四象二十四爻,按爻目列出了每一行星真实运动和平均运动之差,称为损益率,以及各爻损益率之和,称为进退积。进退积是从近日点起算的真实运动与平均运动之差,即行星中心差。二者

<sup>①</sup> 《旧唐书·历志三》。表中带\*的数值均已按(i)变行日中率之和等于合会周期值,(ii)变行度中率之和等于变行度常率之和,(iii)表的对称性,(iv)《新唐书·历志》的木星动态表等,做了校正。

均以辰法为分母,在此仍举木星为例(见表8-11)。

表8-11 木星爻象历<sup>①</sup>

爻目	少阳 少阴 初	少阳 少阴 二	少阳 少阴 三	少阳 少阴 四	少阳 少阴 五	少阳 少阴 上	老阳 老阴 初	老阳 老阴 二	老阳 老阴 三	老阳 老阴 四	老阳 老阴 五	老阳 老阴 上
损益率	益 773	益 721	益 630	益 500	益 331	益 123	损 123	损 331	损 500	损 630	损 721	损 773
进退积	进 退 0	进 退 773	进 退 1494	进 退 2124	进 退 2624	进 退 2955	进 退 3078	进 退 2955	进 退 2624	进 退 2124	进 退 1494	进 退 773

## (二)求平合入爻

求平合行星中心差改正,需知平合时行星的近点角,也即平合入历,其推求步骤如下:

$$\begin{aligned} & \text{天正冬至夜半后平合日算及余} \\ &= \left[ \frac{\text{终率} - (\text{中积分} - \text{天正冬至小余})}{3040} / \text{终率} \right]_R \quad (8-89) \end{aligned}$$

平合入历 = 所求年天正冬至夜半后平合日算及余

— 天正冬至后近日点到冬至日数

= 天正冬至夜半后平合日算及余

$$- \left[ \frac{\text{变差} \times \text{积算}}{3040} / \text{乾实} \right]_R^{\text{①}} \quad (8-90)$$

平合入历满象算及余去之,所得为平合入象算数及余,入象算数及余满爻算及余再去之,得平合入爻算数及余,后者将在求合点行星中心差的公式中用到。

<sup>①</sup> 按算理,此式应取冬至后(而不是冬至夜半后)平分日算及余。否则将使下面求中心差的计算出现误差,并使以二次差内插推求算余之进退数的计算失去意义。

### (三)求合点行星中心差改正及常合时间

利用五星爻象历求行星每算(即度)中心差的术文如下:

以所入爻与后爻损益率相减为前差,又以后爻与次后爻损益率相减为后差,前后差相减,为中差。置所入爻并后爻损益率,半中差以加之,九之,二百七十四而一,为爻末率,因为后爻初率(皆因前爻末率,以为后爻初率)。初末之率相减,为爻差,倍爻差,九之,二百七十四而一,为算差。半之,加减初末,各为定率。以算差累加减爻初定率(少象以差减,老象以差加)为每[算]损益率。循累其率,随所入爻,损益其下进退,即各得其算定。(其四象初爻无初率,上爻无末率,皆置本爻损益[率],四而九之,二百七十四而一,各以初末率减之,皆互得其率。余依术算,各得所求。)<sup>①</sup>

这段术文表述的方法与步交会术中求月亮每度黄纬的方法相同(参见本章第六节)。设所入爻进退积为  $F_1$ , 所入爻及后爻损益率的绝对值分别为  $\Delta f_1$  和  $\Delta f_2$ , 则:

$$\text{前差} = |\Delta F_1 - \Delta F_2| = \Delta^2 F_1$$

$$\text{后差} = |\Delta F_2 - \Delta F_3| = \Delta^2 F_2$$

$$\text{中差} = |\Delta^2 F_1 - \Delta^2 F_2| = \Delta^3 F$$

所在爻爻末率 = 后爻初率

$$= \frac{9}{274} \left( \Delta F_1 + \Delta F_2 + \frac{\Delta^3 F}{2} \right)$$

① 《旧唐书·历志三》。方括号内文字据《新唐书》补。

$$= \frac{1}{15.2 \times 2} \left( \Delta F_1 + \Delta F_2 + \frac{\Delta^3 F}{2} \right)$$

$$\text{所在爻爻初率} = \frac{1}{15.2 \times 2} \left( \Delta F_0 + \Delta F_1 + \frac{\Delta^3 F}{2} \right)$$

$$\text{爻差} = |\text{所在爻爻末率} - \text{所在爻爻初率}|$$

$$= \frac{|\Delta F_2 - \Delta F_0|}{15.2 \times 2}$$

$$\text{算差} = \frac{2 \times 9}{274} \text{爻差} = \frac{|\Delta F_2 - \Delta F_0|}{15.2^2 \times 2} \quad (8-91)$$

$$\text{爻初定率} = \text{所在爻爻初率} \pm \frac{1}{2} \text{算差}$$

$$(\text{少象减, 老象加}) \quad (8-92)$$

$$\text{所在爻每算损益率} = \text{爻初定率} \pm (n-1) \text{算差}$$

$$(\text{少象减, 老象加}) \quad (8-93)$$

$$\text{所在爻第 } n \text{ 算进退定数} = \text{所在爻进退积} \sum_{i=1}^n \text{第 } i \text{ 算损益率} \quad (8-94)$$

807

在已知每算损益率和进退定数的基础上,大衍历又以二次差内插推求算余所对应之进退数,进而求出近点角为任意数值时的进退定数。其术文为:

求平合入进退定数,各置其星平合所入爻之算差,半之,以减所入算损益率,损者,以所入余[减辰法,余]乘限差,辰法除,并差而半之。益者,半入余,乘差,亦辰法除,[皆]加所减之率。乃以入余乘之,辰法而一,所得以损益其算下进退,各为平合所入进退定数。(此法微密,用算稍繁。若从省求之,亦可置其所入算余,以乘其下损益

率,如辰法而一,所得以损益其算下进退,各为定数。)①

如设  $b$  为平合入爻之整算数,  $m$  为算余(也即术文中入余/辰法),则合点入某爻之数可表达为  $b+m$ , 设  $b$  算之进退积和损益率分别为  $f(b)$  和  $\Delta f(b)$ , 其爻算差为  $\Delta^2 f(b)$ 。按术文:

损者:

$$\begin{aligned} & \text{平合入进退定数} \\ &= \text{算下进退} - \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{(\text{辰法} - \text{入余}) \times \text{算差} + \text{算差}}{\text{辰法}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\text{入算损益率} - \frac{1}{2} \text{算差}) \right\} \frac{\text{入余}}{\text{辰法}} \\ &= f(b) - \left[ m \Delta f(b) - \frac{m(m-1)}{2} \Delta^2 f(b) \right] \end{aligned} \quad (8-95)$$

益者:

$$\begin{aligned} & \text{平合入进退定数} \\ &= \text{算下进退} + \left[ \frac{\text{入余} \times \text{算差}}{2 \times \text{辰法}} + (\text{入算损益率} - \frac{\text{算差}}{2}) \right] \times \frac{\text{入余}}{\text{辰法}} \\ &= f(b) + \left[ m \Delta f(b) + \frac{m(m-1)}{2} \Delta^2 f(b) \right] \end{aligned} \quad (8-96)$$

均与等间距二次差内插公式一致。

求出平合入进退定数,即有:

常合日算及余 = 平合日算及余

$$\pm \text{平合入进退定数} \times \frac{\text{乘数}}{\text{除数}} \times \frac{1}{760}$$

(进加,退减)(8-97)

常合日算及余是经过行星中心差改正后的会合日,此会合日

① 《旧唐书·历志三》。方括号内术文据第四节步月离术求月亮朏朒积之术文补。



经过太阳中心差<sup>①</sup>改正即得定合日算及余。

#### (四)求定合日算及余、定合黄道经度和定合所在月、日

$$\begin{aligned} & \text{天正冬至夜半后定合日算及余} \\ &= \text{常合日算及余} \pm \frac{\text{常合日太阳先后定数}}{4 \times \text{辰法}} \\ & \hspace{15em} (\text{先减, 后加}) (8-98) \end{aligned}$$

式中第二项即为太阳中心差改正。

$$\begin{aligned} & \text{定合黄道经度} = \text{定合夜半太阳黄经} + \text{定合余} \\ & \quad \pm \frac{\text{太阳该日盈缩分}}{4 \times \text{辰法}} \times \text{定合余} \\ & \hspace{15em} (\text{盈加, 缩减}) (8-99) \end{aligned}$$

大衍历所求定合月、日的公式为：

$$\begin{aligned} & \text{定合月、日} = (\text{冬至夜半后定合日算及余秒} \\ & \quad + \text{天正冬至大、小余} - \text{天正经朔大、小余}) / \\ & \quad \text{四象之策} \hspace{15em} (8-100) \end{aligned}$$

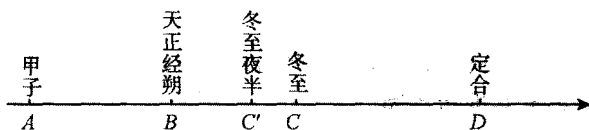


图 8-12 求定合月、日示意

图 8-12 是这一计算之示意图。由图可知，大衍历公式是：

$$\text{定合月、日} = BD / \text{四象之策} = C'D + AC - AB$$

此式是有近似的，应以  $CD$ ，即冬至后定合日算及余秒代替  $C'D$ 。

① 实为地球中心差。

### 三、对整个五星动态表做行星中心差和太阳中心差改正,得出所求会合周期内行星真实视运动表

#### (一)求各动态段起点入爻(变行初日入爻)

定合入爻 = 平合入爻 ± 平合入进退定数

± 太阳中心差改正 (8-101)

定合入爻依次累加各动态段变行度常率,满爻数去之,得每一动态段起点入爻。<sup>①</sup>

#### (二)对各动态段起点做行星中心差改正,求出变行日变率和变行度变率

同求合点行星中心差同样的方法求出各动态段起点的进退定数,以其下乘数乘之,除数除之,得各进退变率。各进退变率前后两两相减,所得加于该段变行日中率和度中率,得各段变行日变率和变行度变率。

#### (三)做太阳中心差等改正,求出变行日、度定率及行星真实视运动表

这一部分内容,新旧唐书历志的术文有较大的不同,以《新唐书》为例,其术文为:

以定合日与前疾初日,后疾初日与合前伏初日先后定数,各以同名者相消为差,异名者相从为并,皆四而一,所得满辰法,各为日度。乃以前日度盈加、缩减其合

<sup>①</sup> 大衍历之后,多数历法均直接以平合入爻求各变行段初日入爻,这一方法更为合理。

后伏度之变率及合前伏、前疾日之变率。亦以后日度盈减、缩加其后疾日之变率及合前伏、前疾度之变率。(金水夕合,反其加减,留退亦然。)其二留日之变率,若差于中率者,即以所差之数为度,各加、减本迟度之变率。(谓以所多于中率之数加之,少于中率之数减之,已下加减准此。)退行度之变率,若差于中率者,即倍所差之数,各加、减本疾度之变率。(其木、土二星,即无迟、疾,即加减前、后顺行度之变率。)其水星疾行度之变率,若差于中率者,即以所差之数为日,各加、减留日变率。(其留日交率若少不足减者,即侵减迟日变率。若多于中率者,亦以新多之数为日,以加留日变率。)各加、减变率讫,皆为日、度定率。其日定率有分者,前后辈之。(辈,配也。以少分配多分,满全为日,有余转配其诸变率。不加减者,皆依变率为定率。)<sup>①</sup>

观此术文,大意是对合前后日、度变率加入太阳不均匀性改正,对其他段目依变率和中率之差进行调整,所得即为变行日、度定率。如若仔细推敲,上述与太阳改正相关的内容意义十分含混,整个改正也是很不完美的。

以变行日、度定率取代五星动态表中的变行日、度中率,再将差行损益率做相应调整<sup>②</sup>,即得所求会合周期行星的真实视运动表(根据需要,也可以只求表的一部分)。

#### 四、已知时间求行星位置及已知行星位置求时间

以行星真实视运动表为基础,可以对任一动态段运用等差级

① 《新唐书·历志四下》。

② 见原文小注,此不详述。

数做已知时间求位置或已知位置求时间的计算。如设变行日定率= $t$ , 变行度定率= $s$ , 该动态段行星平行度为 $\bar{v}$ , 差行损益率为 $d$ , 所给时间到所入动态段起点的时间为 $n$ , 所给时间行星到动态段起点的度数为 $s$ , 动态段初日行分为 $a_1$ , 则大衍历给出的几个比较主要的公式为:

$$\bar{v} = \frac{s}{t} \quad (8-102)$$

$$a_1 = \bar{v} \pm \frac{(t-1)d}{2} \quad (\text{益疾减, 益迟加}) \quad (8-103)$$

$$a_n = a_1 \pm (n-1)d \quad (\text{益迟减, 益疾加}) \quad (8-104)$$

$$s = na_1 \pm \frac{n(n-1)d}{2} \quad (\text{益迟减, 益疾加}) \quad (8-105)$$

上面是已知时间求位置, 已知位置求时间的公式是:

$$n = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\left( \frac{2a_1 \pm d}{d} \right)^2 \mp \frac{8s}{d} \pm \frac{2a_1 \pm d}{d}} \right] \textcircled{1} \quad (8-106)$$

此式益迟者用第一套符号, 益疾者用第二套符号。

由于定合时间及黄道经度、各动态段起点到定合的时间、度数均可求出, 所以利用上述公式不难得出任一时间行星的黄道经度或行星在任一黄道经度的时刻。

步五星术中还给出了求每日夜半行星黄经的方法, 其法为:

定合后夜半星所在黄道经度

= 定合时黄道度 + (辰法一定合小余) × 该星初日行分

(8-107)

① 参见中国天文学史整理小组编:《中国天文学史》, 科学出版社, 1982年, 第155页。

次日夜半星所在黄道经度

=定合后夜半星所在黄道经度+1日所行度分 (8-108)

式中“1日所行度分”应指前述平行度。其后各日依此类推。

## 五、行星黄纬

一行认识到行星的运行轨道与黄道有一定的交角,因此大衍历中出现了一段描述这一现象的文字:

求星行黄道南北,各视其星变行入阴阳爻而定之。

其前变入阳爻为黄道北,入阴爻为黄道南;后变入阳爻为黄道南,入阴爻为黄道北。(其金水二星,以夕变为前变,[晨变为后变]。各计其变行,起初日入爻之算,尽老象上爻末算之数,不满变行度常率者,因置其数,以变行日定率乘之,如变行度常率而一,为日。其入变日数,与此日数以下者,星在黄道南北,依本所入阴阳爻为定。过此日数之外者,黄道南北则反之。)<sup>①</sup>

813

上文表明,大衍历将星行黄道南北与所求会合周期前变、后变入五星盈缩历之阴、阳爻相联系。如按大衍历给出的变差算值算出其制历年代的五星近日点黄经(木星:345°14′;火星300°20′;土星69°90′;金星260°11′;水星286°56′)<sup>②</sup>分析,这是一种较为粗略的定性方法,在中国古代历法中,该法也仅见于大衍历。

① 《旧唐书·历志三》。方括号内容据《新唐书》补。

② 陈美东:《古历新探》,第427页。

## 第八节 余论

隋唐两代是中国古代历法的快速发展时期。在隋代皇极历引入太阳、五星的不均匀性改正、月亮视差的经验改正,并创立等间距二次差内插法的基础上,一行又以更精密的实测为依据,将历法内容做了进一步完善,推进了中国历算家对天体运动规律的整体认识。

大衍历的创新主要包括:①给出了更为符合太阳运动规律的日躔表,纠正了皇极历对日行变化的若干不正确描述<sup>①</sup>,并将二次差内插法推广至不等间距;②将以文字表述的对月亮视差的经验改正变为连续的表格及公式形式,明确了该改正中各种概念,为宣明历在日食计算上的发展奠定了基础;③首创五星爻象历表,并使五星中心差改正从前此历法中的一点推广至整个会合周期;④创立了太阳天顶距与晷影长对应表及其以此表为基础的求中晷影长的方法;⑤首次提出了不同纬度(九服)地区晷漏和交食食差的换算方法;⑥创立全新的推灭术,使灭与没从此成为两个相对独立的概念<sup>②</sup>;⑦全篇历法按内容分裁为整齐的七个部分,编算结构清晰合理,等等。这些创新大多为后世历法所采纳。

大衍历之后,中国古代历法又经历了一些重要的发展,像宣明历日食三差的引入,从崇玄历起对历法计算所做的公式化等,但各历的主要内容和形式均是在大衍历时即已确定。至元授时历之前,再没有哪一部历法能像大衍历一样在内容上有如此之多的扩充,这也使大衍历在中国历法史上一直备受瞩目。

① 关于这一问题,曲安京在“中国古历若干典型算法的数理分析”中有直观的描述,参见《中国古代数理天文学探析》,第232页。

② 王荣彬:《中国古代历法推没灭术意义探秘》。

## 第九章 宣明历术及晚唐 五代宋历法

### 第一节 宣明历法数和日月运动

#### 一、宣明历的颁行、创新及影响

《新唐书·历志》称，唐肃宗时，山人韩颖上言大衍历或误。帝疑之，以颖为太子宫门郎，直司天台。又损益其术，每节增二日，更名至德历，起乾元元年(758)用之，迄上元三年(762)。有关至德历及其行用，历史文献仅有此寥寥数语。

唐代宗宝应元年(762)六月望戊夜，月食三之一。官历加时在日出后，有交不署食。代宗以至德历不与天合，诏司天台官属郭献之等，复用麟德元纪，更立岁差，增损迟疾、交会及五星差数，以写大衍旧术。上元七曜，起赤道虚4度。代宗亲为制序，并题曰五纪历。五纪历与大衍小异者九事。有关进朔方法一，晷漏术一，交食术五，五星术二。五纪历有些地方也沿袭麟德历，如总法，月离表并以近地为起点。《新唐书·历志》说，“大衍以四象考五星进退，或时弗叶。献之加减颇异而偶与天合。”于是颁用迄建中四年(783)。其数术载《新唐书·历志》。五纪历将岁差常数改小。

$$\text{岁差} = \text{乾实 } 489442.70 - \text{策实 } 489428 = 14.70$$

$$\text{通法 } 1340 (\text{同麟德历})、\text{岁差常数 } \frac{14.7}{1340} = 0.01097, \text{岁差合 } 91.1565$$

年始差1度,失之过小。在交会术增加了一些新的实测数据,有一定改进。

德宗时,五纪历气朔加时稍有后天,推测星度与大衍差率颇异。诏司天徐承嗣与夏官正杨景风等,杂麟德、大衍之旨治新历。上元七曜起赤道虚4度。建中四年(783)历成,名曰正元。诏起五年(784)正月施行。会朱泚之乱,改元兴元。值李晟收复京师,朱泚逃亡被杀。自是颁行,迄元和元年(806)。正元历的气朔、发敛、日躔、月离、轨漏、交会诸术,悉如五纪法,而有变易。其五星基本沿袭麟德旧术。仅法数与五纪微异。因此新唐志仅载法数和日躔、月离、交会、五星等表和有关数据。

宪宗即位(元和元年,806),司天徐昂上新历,名曰观象。起元和二年(807)用之。新唐历志只说,此历“无蓍章之数。至于察敛启闭之候,循用旧法,测验不合”。“观象历今有司无传者。”这样,直到穆宗长庆二年(822)颁行宣明历,这16年的历法,与肃宗行用5年的至德历,历史上只简单记载了行用的起迄年份,寥寥一两句概括的评述,数术皆无记载。迄今也未发现至德历、观象历的历书或残页。今长历只能分别借用其前行用的大衍、正元历术推算。

至穆宗立(821),认为继承累世伟业,必更历纪,乃诏日官改撰历术,名曰宣明。起长庆二年(822)用宣明历。自敬宗至于僖宗皆遵用之。虽朝廷多故,不暇讨论。然大衍历后,法制简易,合望密近,无能出其右者。迄景福元年(892),凡用71年。这样一部唐代行用最长历法的修撰、颁行过程,《新唐书》仅仅只说了上述几句话。撰修者只言“日官”,而不著姓名。宋史律历志明天历议,明天历术结尾,周琮又论历中提到“唐徐昇(为昂之误)作宣明历,悟日食有气、刻差数”。元史历志授时历议“不用积年日法”中,宣明历条下注明长庆二年壬寅徐昂造,行71年,至景福癸丑。



所以后世才将宣明历的著作权还给了徐昂。《新唐书·历志》说，宣明历上元七曜起赤道虚9度。其气朔、发敛、日躔、月离皆因大衍旧术；晷漏、交会，则稍增损之；更立新数以步五星。对它总的评价是，“大衍历后，法制简单，合望密近，无能出其右者。”

大衍历计算定朔的太阳改正数，气朔距是指平朔到其前定气的时日。定气是按日行黄道等分24份划分的。太阳每走到一个分点为交气时刻。日行有盈缩，所以定气间时距是不等的。大衍历为此发展建立了不等间距二次差内插公式来计算日行盈缩和定朔的太阳改正。徐昂方法上做了进一步改进，得出二次差不等间距内插公式另一形式，更易理解，应用上也更加简便。

日出日没早晚、晷影长短的测定在同一时节与地理纬度有关。宣明历首次在步晷漏术中注明测量地的北极出地度分（即地理纬度）。

历法疏密，验在交食。历代历家莫不潜心研究这个历法推步中最困难的问题，企使交食合天。大衍历首推九服见食食分及初亏、食甚、复满三限时刻。发展了交食推步。宣明历首创时气刻三差，以改进去交定分、食分和食甚、定用刻率，提高了推步精度。且历法中首次引入日月带食出没的推步方法，皆为后世历家沿用。其创始之功自不可没。历议、历术、数表简要精到、言简意赅，确是大衍后唐代优秀历法。

麟德、大衍、宣明是唐代三大名历，共行用164年。加上戊寅历行用46年。唐代始终290年，历凡九改。这四历共行用了210年。

隋唐时代，日本积极发展同中国的外交关系。为了向中国学习先进的文化和典章制度，从公元600年起的二百多年中，先后派遣隋使4次，遣唐使19次。唐时实际到达的有13次。对促进古代日本政经改革、发展中日文化交流起了重大作用。这样，中

国历法也东传到了日本,自持统天皇六年(692)直到贞享元年(1684)凡994年日本一直行用中国的历法。文武天皇元年始行麟德历(日称仪凤历)。圣武帝天平七年(735)四月,吉备真备自唐归国,持《大衍历经》一卷,《大衍历立成》十二卷以归。天平宝字元年(757)十一月,规定大衍历为历局官生的教科书。七年(763)八月颁诏停用仪凤历,行大衍历。麟德历(仪凤历)在日行用了67年。天安二年(858)起参用中国五纪历,大衍、五纪二历并用。贞观元年(859)勃海大使马孝慎上徐昂作长庆宣明历经。清和帝贞观三年(861)真野麻吕详奏请用。四年(862)起颁行宣明历,直到贞享二年(1685)施行自己编制的贞享历为止。大衍历在中国仅用29年,在日却行用了94年。宣明一术日本竟施行了823年。麟德、大衍、宣明三历在日本共颁行了980年。高丽建国即用宣明历,直到忠宣王(1309—1313)改行元授时历,而步交会仍循宣明旧术,直到1392年为李氏朝鲜取代止,行用了约400年。日本有不少仪凤、宣明历书传世。如正仓院保存的天平十八年(746)、二十一年(749)和天平胜宝八岁(756)的仪凤历残页。1980年又在静冈县浜松市郊发现神龟六年(729)仪凤历残页。近年又在宫城县多贺城遗址发掘出土了大衍历行用期间的历书残页。宣明历施行的823年中,至今尚有多种残历留传。在日本各种文献、笔记中留存了大量这一时期的日月食预报和观测记载。为我们今天研究这部行用最久的历法提供了十分宝贵的材料,它们对现代天文、历法研究也有重要的作用。

## 二、法数闰限与平运动的计算

宣明历演纪上元甲子,至长庆二年(822)壬寅,积7070138,算外。

统法8400:日的分数。

章岁 3068055:岁实、回归年的日分。

章月 248057:朔实、合策、朔望月的日分。

通余 44055:章岁 $-360\times$ 统法。

章闰 91371:章岁 $-12\times$ 章月。

闰限  $240443\frac{6}{8}$ :闰余分超过闰限之月置闰。

中节  $15\frac{1835}{8400}\frac{5}{8}$ :中节长度 $=\frac{\text{章岁}}{24\times 8400}=15.21852679$ 。

合策  $29\frac{4457}{8400}\frac{\text{章月}}{\text{统法}}=29.53059524$ 。

象准  $7\frac{3214.25}{8400}\frac{1}{4}$ 合策 $=7.38264881$ 。

中盈分  $3671\frac{2}{8}\frac{\text{章岁}}{12}-30\times 8400$ 。

朔虚分  $3943:30\times$ 统法一章月。

旬周 504000: $60\times 8400$ 。

纪法 60。

秒法 8。

候数  $5\frac{611}{8400}\frac{7}{8}$ :岁实/72 候。

卦位  $6\frac{734}{8400}\frac{2}{8}$ :岁实/60 卦。

辰数  $12\frac{1468}{8400}\frac{4}{8}$ :中节 $-\frac{1}{2}$ 卦位。

刻法 84:统法/100,日有百刻,刻的分数。

象数 920446199:周天分。

周天 365 度:周天整数度。

虚分  $2153 \frac{299}{300}$ : 周天度的余分。

岁差 29699: 象数  $-300 \times$  章岁, 为岁差秒数。

分统 2520000:  $8400 \times 300$ , 为一日秒数。

秒母 300: 为周天度分的秒母。

六虚之差  $53 \frac{299}{300}$ : 由  $365 \frac{2153 \frac{299}{300}}{8400} - 365 \frac{1}{4} = \frac{53 \frac{299}{300}}{8400}$  得出。

历周 231458.19: 近点月日的分数。

历周日  $27 \frac{4658.19}{8400}$ : 历周/统法  $= 27.5545464286$ 。

历中日  $13 \frac{6529.095}{8400}$ :  $\frac{1}{2}$  历周日。

周差日  $1 \frac{8198.81}{8400}$ : 合策一历周日。

秒母 100: 历周计算中的秒母。

7 日: 初数 7465, 末数 935。  $7465 + 935 = 8400$ , 为  $\frac{1}{4}$  历周日。

(近点月)的小数部分。  $\frac{1}{4}$  历周日  $= 6 \frac{7464.55}{8400}$ 。

14 日: 初数 6529, 末数 1871, 为  $\frac{1}{2}$  历周日的小数部分(余分)。

$\frac{1}{2}$  历周日  $= 13 \frac{6529.095}{8400} \approx 13 \frac{6529}{8400}$  日, 末数  $= 14 - \frac{1}{2}$  历周日  $=$

$13 \frac{8400}{8400} - 13 \frac{6529}{8400} = \frac{1871}{8400}$ 。

上弦 91  $\frac{2638 \frac{149.75}{300}}{8400}$  度:  $\frac{1}{4}$  全周天度。

望 182  $\frac{5276 \frac{299.5}{300}}{8400}$  度:  $\frac{1}{2}$  全周天度。

$$\text{下弦 } 273 \frac{7915 \frac{149.5}{300}}{8400} \text{度} : \frac{3}{4} \text{全周天度。}$$

终率 228582.6512: 为交点月分数。

$$\text{终日 } 27 \frac{1782.6512}{8400} : \text{交点月} = \frac{\text{终率}}{\text{终法}} \\ = 27.21222038。$$

$$\text{中日 } 13 \frac{5091.3256}{8400} : \frac{1}{2} \text{终日} = 13.60611019。$$

$$\text{岁实(回归年)} = \frac{\text{章岁}}{\text{统法}} = \frac{3068055}{8400} = 365 \frac{2055}{8400} \\ = 360 \frac{44055}{8400} = 365.2446429$$

44055 称作通余。248057 年共 3068055 个月。内 91371 个闰月，称章闰。

回归年比 12 个朔望月长  $10 \frac{7371}{8400}$  日或 91371 分。称作冬至月龄或天正冬至闰余，为冬至距天正经朔的日分。每年冬至距天正经朔都要增加这么多日分。当闰余积分满朔实日分(章月)时，就需设一闰月，以保证冬至总出现在天正(十一月)月内，宣明历当岁前冬至月龄，即闰余分大于 156686 时，其年置闰(156686 + 91371 = 248057)。至于该闰何月，将每年增加的闰余日分 91371 以 12 除之，得 7614.25 分。将冬至闰余分按月递增此数，何月闰余分其和大于章月(248057)时，该月即为闰月，重上个月月名。判断何月闰月的标准称作闰限。由以上讨论可知，其值为：

$$\begin{aligned} \text{闰限} &= \text{章月} - \frac{1}{12}(\text{章岁} - 12 \times \text{章月}) \\ &= 248057 - \frac{1}{12}(3068055 - 12 \times 248057) \\ &= 240442 \frac{6}{8} \end{aligned}$$

《新唐书·历志》法数中闰限为  $240443\frac{6}{8}$ , 误。其中个位数 3 为 2

之讹(2 误作 3), 应为  $240442\frac{6}{8}$ 。

上式中(章岁 $-12\times$ 章月) $=91371$ , 即章闰。可以看出, 宣明历章岁、章月、章闰, 与岁实、朔实、闰余分之间直接一一对应, 非常巧妙。当依上述方法寻找应闰何月时, 若某月闰余分适值闰限左右时, 置闰与否须据定朔判定。

朔望月即合策 $=$ 章月/终法 $=29.53059524$  日

在第七章第七节我们得出:

$$\begin{aligned}\text{月每日平行度} &= \frac{\text{周天度}}{\text{朔望月}} + 1 = \frac{\text{象数}}{300 \times \text{章月}} + 1 \\ &= \frac{920446199}{300 \times 248057} + 1 \\ &= 13.36874588 \text{ 度}\end{aligned}$$

如略去岁差, 以回归年代恒星年, 即以岁实代替全周天度, 则有:

$$\begin{aligned}\text{月日平行度} &= \frac{\text{章岁} + \text{章月}}{\text{章月}} = \frac{3316112}{248057} \\ &= 13.3683468 \text{ 度}\end{aligned}$$

两者仅相差 0.0003991 度。

$$\begin{aligned}\text{全周天度} &= \frac{\text{象数}}{\text{分统}} = 365 \frac{2153}{8400} \frac{299}{300} \\ &= 365.2564282\end{aligned}$$

$$\text{岁差} = \text{象数} - 300 \times \text{章岁} = 29699$$

$$\begin{aligned}\text{岁差度} &= \frac{\text{岁差秒}}{\text{分统}} = \frac{29699}{2520000} \\ &= 0.01178531746\end{aligned}$$

合 84.85 年而差 1 度。岁差常数仍嫌较小。

宣明历 1 日分为 8400 分称作统法, 1 分约近于现今的 10 秒

钟(1日86400秒)。回归年以统法表示为3068055分,称章岁;朔望月以统法表示为248057分,叫章月。中国历日常以60干支周期描述。旬周(60日)的日分为 $60 \times 8400 = 504000$ 。章闰=章岁- $12 \times$ 章月=91371。宣明历与大多中国古历一样,选取甲子日晨初夜半( $0^h$ )合朔冬至齐同作为历的起算点,又称上元。这一时刻同时又是日月五星同经,日月正好在降交点,月又处于远地点之时。日在冬至点宣明历与其他古历一样,视作日处在近地点。这就是通常说的日月如合璧,五星若连珠。

上元积年:上元至长庆二年(822),积7070138。

$$\text{积年} = 7070138 + (\text{所求年} - 822)$$

$$\text{通积分} = \text{积年} \times \text{章岁 } 3068055$$

为避免大数字运算,宣明历做了分解、简化。

令

$$r_1 = [\text{积年} / \text{旬周分 } 504000]_R$$

$$\text{天正冬至日分} = [(r_1 \times \text{通余 } 44055) / \text{旬周分 } 504000]_R$$

$$\text{天正冬至大小余} = \text{天正冬至日分} / 8400$$

类似,可求天正闰余(冬至平月龄)。

令

$$r' = [\text{积年} / \text{章月}]_R$$

$$\text{天正冬至闰余日分} = [(r' \times \text{章闰 } 91371) / \text{章月}]_R$$

$$\text{天正闰余} = \text{天正闰余日分} / \text{统法 } 8400$$

由所得天正闰余减冬至大小余得天正经朔。

$$\text{天正经朔大小余} = \text{冬至大小余} - \text{天正闰余}$$

### 三、太阳盈缩和日度

宣明历日躔表的组成形式与大衍历相同。仅盈缩分、先后数以刻法84而非以统法8400为度母,与大衍稍异。日躔表给出二

十四气各气的盈缩分、先后数、损益率、朏朧数四项数值。

盈缩分为本气内太阳实行度、平行度之差与刻法 84 之乘积。盈为实行快于平行，缩反之。

盈缩分 =  $84 \times (\text{本气内日实行度} - \text{日平行度})$

先后数为其前各气盈缩分的累积值。日实行在平行前称先，实行落后于平行为后。即

$$\text{先后数} = \sum_{i=1}^{n-1} \text{盈缩分}$$

冬至、夏至条下的先初、后初，是说在冬至、夏至交气时并无盈分和缩分的累积。是时太阳实行、平行同在一处。

损益率、朏朧数两栏是为计算定朔弦望时进行太阳改正所设。经分析，损益率与大衍历及其前几历相同，其值仍为气内日实行度、平行度之差与月亮平行度之比值与统法的乘积。即

$$\begin{aligned} \text{损益率} &= 8400 \times \frac{(\text{气内日实行度} - \text{日平行度})}{\text{月每日平行度}} \\ &= \frac{100 \times \text{盈缩分}}{\text{月每日平行度}} \end{aligned}$$

朏朧数为其前各气损益率的累加累减值。

$$\text{朏朧数} = \sum_{i=1}^{n-1} \text{损益率}$$

从秋分到春分，日实速大于平速，春分到秋分，实速小于平速；其中冬至速度最快，夏至最慢；二分日实速等于平速。这样，在冬至到夏至半年实太阳总在平太阳前；夏至到冬至半年实太阳在平太阳后。朏朧积在冬至到夏至半年，日躔表注为朏，夏至到冬至半年注为朧。介绍定朔计算时说过这是因为推求定朔望时，太阳改正和月亮改正的符号相反。大衍、宣明称冬至到夏至为朏，是为了与月亮改正采用同样改正符号而这样登记的，至于损益率的正负号，前面讲过，损益是指其下朏朧值的绝对数值损益



而言的。这里的脑段益为正、损为负；朏段益为负、损为正。

我们已介绍了几种日躔表、月离表的组成。因为各史历志中对此并不做详细说明。诸历日躔表、月离表各项数值名称不一，有时内容含义也不尽相同，各栏数值所含的因子又不一致。对于初学者往往不明所以。而掌握了日躔月离的盈缩迟疾改正，日月运动和定朔望、定气、步朔闰等历日制度等问题就可迎刃而解了。

宣明历计算日躔盈缩，也采用定气不等间距二次差内插算法，但方法上比大衍历有所简化、改进。令本气、后气盈缩分为  $\Delta_1$ 、 $\Delta_2$ ，本气、后气定气长度为  $L_1$ 、 $L_2$ ，按宣明历术文有：

$$\text{本气中率} = \frac{\Delta_1}{L_1}$$

$$\text{后气中率} = \frac{\Delta_2}{L_2}$$

$$\text{合差} = \frac{\Delta_1}{L_1} - \frac{\Delta_2}{L_2}$$

$$\text{中差} = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \left( \frac{\Delta_1}{L_1} - \frac{\Delta_2}{L_2} \right)$$

$$\text{初率} = \frac{\Delta_1}{L_1} + \frac{L_1}{L_1 + L_2} \left( \frac{\Delta_1}{L_1} - \frac{\Delta_2}{L_2} \right)$$

$$\text{末率} = \frac{\Delta_1}{L_1} - \frac{L_1}{L_1 + L_2} \left( \frac{\Delta_1}{L_1} - \frac{\Delta_2}{L_2} \right)$$

$$\text{日差} = \frac{2}{L_1 + L_2} \left( \frac{\Delta_1}{L_1} - \frac{\Delta_2}{L_2} \right)$$

$$\text{定率} = \begin{cases} \text{初率} - \frac{1}{2} \text{日差} \\ \text{末率} + \frac{1}{2} \text{日差} \end{cases}$$

定率，“以日差累加減之，为每日盈缩差”。这是一个等差级数。首项  $a = \text{初率} - \frac{1}{2} \text{日差}$ ，公差  $d = \text{日差}$ 。则第  $t$  日的盈缩分  $\delta_t$

为:

$$\begin{aligned}\delta_i &= a - (t-1)d \\ &= \frac{\Delta_1}{L_1} + \frac{L_1}{L_1+L_2} \left( \frac{\Delta_1}{L_1} - \frac{\Delta_2}{L_2} \right) - \frac{1}{L_1+L_2} \\ &\quad \times \left( \frac{\Delta_1}{L_1} - \frac{\Delta_2}{L_2} \right) - \frac{2(t-1)}{L_1+L_2} \left( \frac{\Delta_1}{L_1} - \frac{\Delta_2}{L_2} \right) \\ \sum_1^t \delta_i &= \frac{t}{2} [2a - (t-1)d] \\ &= t \frac{\Delta_1}{L_1} + t \frac{L_1}{L_1+L_2} \left( \frac{\Delta_1}{L_1} - \frac{\Delta_2}{L_2} \right) - \frac{t^2}{L_1+L_2} \left( \frac{\Delta_1}{L_1} - \frac{\Delta_2}{L_2} \right)\end{aligned}$$

所以,入气先后(朏朧)定数为:

$$T = T_0 + t \frac{\Delta_1}{L_1} + t \frac{L_1}{L_1+L_2} \left( \frac{\Delta_1}{L_1} - \frac{\Delta_2}{L_2} \right) - \frac{t^2}{L_1+L_2} \left( \frac{\Delta_1}{L_1} - \frac{\Delta_2}{L_2} \right)$$

“凡百乘气下先后数,先减后加常气,为定气。”由日躔表某气下盈缩分可得该气定气长度。即

$$\text{定气长度} = \text{常气}(15.2185) \pm \frac{100 \times \text{气下盈缩分}}{8400}$$

盈减、缩加。因各气条下先后数为其前各气盈缩分的累加累减值,要求某一定气距冬至的长度,先求出其间平气相距,再先减后加  $100 \times$  所求气下先后数即得。如求春分定气距冬至,有

$$\text{冬至距春分定气} = 6 \times 15.2185 \pm \frac{204 \times 100}{8400}$$

$$= 88.8626 \text{ 日} \quad (\text{先减后加})$$

宣明历采用与大衍历相同的方法计算冬至赤道加时日度、黄道加时日度和每日夜半日度。

其赤道宿度与黄道互求是采用等差级数的方法得出。设赤道、黄道距度分别用  $\alpha$ 、 $L$  表示。大衍历选取二分二至作标准,在这四点太阳的黄、赤道距度相同。以 5 度为 1 限。历议说:“黄道之差始自春分秋分,赤道所交前后各五度为限。初,黄道增多赤

道二十四分之十二,每限损一,极九限,数终于四,率赤道四十五度而黄道四十八度。至四立之际,一度少强,依平。复从四起,初限五度,赤道增多黄道二十四分之四,每限益一,极九限而止,终于十二,率赤道四十五度而黄道四十二度,复得冬夏至之中矣。”话说得很清楚。以二分前后各 5 度为初限。初限黄道距度大于赤道距度,多  $\frac{12}{24}$  度。以后每限损 1,即黄道比赤道多的度数每限少  $\frac{1}{24}$ ,至第 9 限,达到极值为  $\frac{4}{24}$  度。9 限为 45 度。赤道距二分点 45 度时,黄赤道距度差为 3 度,即黄道距度为 48 度。一象限为 91.3141 度。分至的中点为四立。四立距分至点为 45.657 度,比 9 限多 0.637 度。四立前后各 0.637 度,即四立之际 1 度少强 ( $2 \times 0.637 = 1.3141$  度),黄赤道距度差依平,按 3 度计算。四立所在 1.3141 度过后到二至点又为 45 度,仍以 5 度为限。初限 5 度,赤道比黄道多  $\frac{4}{24}$  度,以后每限增 1,至第 9 限达到极值,赤道比黄道距度多  $\frac{12}{24}$  度。即四立后赤道距二至达 45 度,赤道比黄道距度大 3 度,黄道距度仅 42 度,  $42 + 48 = 90$ 。因此二至点的黄赤道距度又相同了。黄赤道距度差具体关系如表 9-1。

这是一个等差级数,公差  $d = -\frac{1}{24} \left( \frac{1}{24} \right)$ , 首项  $a = \frac{12}{24} \left( -\frac{12}{24} \right)$ 。

对于从四立起算的黄赤道距度差,则首项  $a = \frac{4}{24}$ , 公差  $d = \frac{1}{24}$ 。级数的末项  $z$ 、 $n$  项之和  $S_n$  为

$$z = a + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a+z) = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

表 9-1 大衍历、宣明历黄赤道距度差

限数	$\alpha$	二分	前后	$L-\alpha$	二至	前后	$L-\alpha$
		$\Delta(L-\alpha)$	$\Delta^2(L-\alpha)$		$\Delta(L-\alpha)$	$\Delta^2(L-\alpha)$	
初限	0~5	12/24		12/24	-12/24		-12/24
二限	5~10	11/24	1/24	23/24	-11/24	1/24	-23/24
三限	10~15	10/24	1/24	33/24	-10/24	1/24	-33/24
四限	15~20	9/24	1/24	42/24	-9/24	1/24	-42/24
五限	20~25	8/24	1/24	50/24	-8/24	1/24	-50/24
六限	25~30	7/24	1/24	57/24	-7/24	1/24	-57/24
七限	30~35	6/24	1/24	63/24	-6/24	1/24	-63/24
八限	35~40	5/24	1/24	68/24	-5/24	1/24	-68/24
九限	40~45	4/24	1/24	72/24	-4/24	1/24	-72/24
四立	45~46.31			72/24			-72/24

由此可以计算任何一限的  $L-\alpha$  值。如四立后第  $n$  限的  $L-\alpha = 3 - S_n = 3 \text{ 度} - \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$ 。得到的黄赤道距度差称黄赤道差数。二至前后，赤经度大、黄经度小，故二至前后各九限，黄道度 = 赤道度 - 黄赤道差数；二分前后黄经度大、赤经度小，故二分前后各九限（45 度），黄道度 = 赤道度 + 黄赤道差数。

宣明历同大衍历，上元七曜起赤道虚 9 度。

求冬至加时赤道日度：

$$\text{冬至赤道日度} = [\text{积年} \times \text{回归年长} / \text{周天}]_R$$

自虚 9 度数起（不计入虚 9），满赤道宿次去之，至不满宿（斗宿）的度分为冬至加时赤道宿度。

将冬至赤道斗宿度分按上述黄赤道互求方法，由冬至斗宿赤道度分内减去黄赤道差数，得冬至加时黄道日度。

大衍历、宣明历岁差为赤道岁差。要求各定气的加时黄道日度,先求出相应的岁差秒分加到定气距冬至长度以为赤道距度。再按上述黄赤道互求方法得出黄道距度,以加冬至黄道日度,得各定气加时黄道日度。定气小余乘按上面方法求出的某日盈缩分,用84刻法来除,得数盈加缩减定气小余。其值即定气小余这段时间里太阳实际运行的度分。用它来减该定气加时的黄道日度,得定气夜半日度。每加1日(度),就以其日盈缩分(被刻法除)盈加,缩减定气初日夜半日度,即得每日夜半黄道日度。

## 第二节 日月黄经和定气天文计算

6世纪,张子信发现日行盈缩,隋唐及以后的历法,都用以推算太阳位置和在定朔望计算中加进太阳改正。并自初唐戊寅历、麟德历开始,其后历书一直用定朔注历。虽然中国历书中清时宪历才采用定气,但唐大衍、宣明等历已用定气计算太阳改正,推算太阳位置和交会时刻。为了考查唐及以后历法日躔表及推算定气和太阳位置的方法和精度,这里我们介绍计算太阳黄经和节气的现代方法,以资比较。

计算太阳黄经如要求精度不高,只要准确到 $10''$ 左右,节气时刻只要求准确到5~10分钟时,那计算可以大大减化。在太阳黄经的中心差公式中可以略去 $e^3$ 以上的项( $e$ 为偏心率),利用有三角函数的计算器,进行几项简单运算,并做初步章动、光行差改正就可以了,为要提高精度到 $1''\sim 2''$ ,节气时刻准确到 $1^m$ ,则每个太阳位置均需进行百多项的复杂运算方可。它的困难和花费的劳动都要增加几十倍上百倍。下面介绍的计算太阳黄经的简单公式,笔者做过计算和检验,证实方法是可行的。

$$L_0 = 279^\circ.6966778 + 36000^\circ T + (2768''.13T + 1''.089T^2)/3600$$

$$L_0 = (1006908''.04 + 129602768''.13T + 1''.089T^2) / 3600$$

$$DL_1 = [(6910''.057 - 17''.24T) \times \sin M + 72''.338 \times \sin(2M)] / 3600$$

$$DL_2 = -(20''.49 + 17''.2 \times \sin Q) / 3600$$

$$L = L_0 + DL_1 + DL_2$$

其中

$$T = (JD - 2415020) / 36525$$

$$M = 357^\circ.528 + 35999^\circ.05E$$

$$Q = 125^\circ.045 - 1934^\circ.136E$$

$$E = (JD - 2451545) / 36525$$

$JD$  为所要求太阳黄经的日期时刻对应的儒略日及小数,可由天文年历、各种历表查出或用天文书籍中介绍的方法由公历日期推出。 $L_0$  为太阳平黄经,所给出的两式可根据所用计算工具有效位数任选其一,结果相同。求出平黄经  $L_0$  后,经过中心差改正  $DL_1$ ,再做简单的光行差、章动改正  $DL_2$ ,就得出太阳黄经  $L$ 。

计算二十四节气时刻分两个步骤。

①按一定时间间隔算出太阳黄经。②根据所得太阳黄经,利用逆内插公式,求出节气时刻。即用逆内插法,反推出所需节气的黄经值(如冬至的黄经为  $270^\circ$ ,立春太阳黄经为  $315^\circ$ 等)所对应的日期、时刻。

沿黄道一周划分为 24 等份得出的节气为定气。因地球轨道为椭圆,运行有疾徐,视太阳通过同样的黄经( $15^\circ$ )所需要的时间是不相同的。

逆内插就是已知太阳位置  $S(t_0 + h)$ ,欲求  $h$ ,  $h$  是小于 1 的小数。一般用白塞尔内插公式:

$$h = [S(t_0 + h) - S(t_0) - B_2(\Delta''_0 + \Delta''_1)] / \Delta'_{\frac{1}{2}}$$

$B_2$  为白塞尔内插系数,其值  $B_2 = \frac{h(h-1)}{2 \cdot 2!}$ 。因  $h$  不知,先取

$B_2 = 0$ ,即用  $h = [S(t_0 + h) - S(t_0)] / \Delta'_{\frac{1}{2}}$ ,计算出  $h$  的第一近似

值,再以它代入  $B_2 = \frac{h(h-1)}{2 \cdot 2!}$  中,得出  $B_2$  后再代入上式得出  $h$  的第二近似值。再代入  $B_2$ ,得出新的  $B_2$  继续依上计算,最终得出  $h$  值与前一次  $h$  值相同(如误差  $< 0.000001$  日),即为所求。通常只需做两三次。具体做法是先求出与所求节气黄经相近的 4 日子夜的太阳黄经,取它们的一次差、二次差利用以上方法计算。即

$$\begin{array}{lll} t_{-1} & S(t_{-1}) & \\ t_0 & S(t_0) & S(t_0) - S(t_{-1}) = \Delta'_{-\frac{1}{2}} \\ t_1 & S(t_1) & S(t_1) - S(t_0) = \Delta'_{\frac{1}{2}} \\ t_2 & S(t_2) & S(t_2) - S(t_1) = \Delta'_{\frac{3}{2}} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \Delta'_{\frac{1}{2}} - \Delta'_{-\frac{1}{2}} = \Delta''_0 \\ \Delta'_{\frac{3}{2}} - \Delta'_{\frac{1}{2}} = \Delta''_1 \end{array}$$

$\Delta'$ 、 $\Delta''$  分别为一次差、二次差。经考查,对于近三四百年的节气时刻,由上列算式可准确到 5~10 分钟(平均小于  $5^m$ )。对于过去 3000 年,它可准确到 10~20 分(平均小于  $10^m$ )。这个计算简单易行,当然精度不够好。但用来比较古历计算的太阳位置和定气时刻还是够用的。也可满足一般生产生活和研讨各种灾害与天象的关系等对太阳位置和节气时日的使用需要。对于早于公元 1600 年的计算,所得节气时刻还需减去

$$\Delta T = 24^s.349 + 72^s.318T + 29^s.950T^2$$

这里  $\Delta T = ET - UT$ , 是历书时(ET)换算成世界时(UT)所需加的改正。

日月同经,谓之合朔。合朔时黄道日度即月离黄道度。用内插法得出定朔小余时间的月实行度分,以减加时月离,得定朔夜半月离。以每日月实行度分递加之,得每日夜半月离。

现代计算月亮黄经  $\lambda$  的方法比较复杂。但为了考查历代月离表和古历推算月亮位置的疏密,可以选用下面比较简单的算法。

$$\begin{aligned} \lambda = l + 22640'' \sin m + 769'' \sin(2m) \\ + 36'' \sin(3m) + 2370'' \sin[2(l-L)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -668'' \sin M - 412'' \sin[2(l - \Omega)] \\
& + 4586'' \sin[2(l - L) - m] \\
& + 212'' \sin[2(l - L - m)] \\
& + 206'' \sin[2(l - L) - m - M] \\
& + 192'' \sin[2(l - L) + m] \\
& + 165'' \sin[2(l - L) - M] \\
& - 110'' \sin(m + M) + 148'' \sin(m - M)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
l &= 270^\circ.434164 + 481267^\circ.883142T - 0^\circ.001133T^2 \\
m &= 296^\circ.104608 + 477198^\circ.849108T + 0^\circ.009192T^2 \\
\Omega &= 259^\circ.183275 - 1934^\circ.142008T + 0^\circ.002078T^2 \\
L &= 279^\circ.696678 + 36000^\circ.768925T + 0^\circ.000303T^2 \\
M &= 358^\circ.475833 + 35999^\circ.049750T - 0^\circ.000150T^2 \\
T &= (JD - 2415020.0) / 36525
\end{aligned}$$

$JD$  为儒略日。 $T$  为自 1900.1.0.12<sup>h</sup> 历书时起算的儒略世纪数。 $l$  是月亮平黄经; $m$  乃月亮平近点角。 $\Omega$  为月轨升交点的平黄经。 $L$  是太阳平黄经; $M$  乃太阳平近点角。为了达到  $2' \sim 5'$  的精度, $l$  选取 3 位小数,其他各项选取 2 位即可。

### 第三节 定朔推步和进朔

宣明历的月离表与大衍历形式完全相同。列出一个近点月内每日的历分、进退、积度、损益率和朏朙积五项数据。俱从远地点开始。除历分、转分、进退衰、列衰名称稍有不同外,宣明历最大特点是将一近点月分成两半,从远地点到近地点,由近地点到远地点各 13.77726 日。入历日(入近点月日数)小于半数(13.77726)者用月离表的前半进栏部分数据,大于半数者减去历



中日(半数)使用月离表后半退栏数据。

$$\text{历分} = \text{月实行度} \times \text{刻法 } 84 = \text{月实行分}$$

$$\text{进退衰} = \text{次日历分} - \text{本日历分}$$

后多为进,后少为退。

$$\text{积度} = \sum \text{历分} / \text{刻法 } 84$$

度分仍以刻法为分母。

$$\text{损益率} = (\text{历分} - \text{月平行分}) \times \text{统法} / \text{月平行分}$$

$$\text{朏脑积} = \sum \text{损益率} = \sum \frac{(\text{历分} - \text{月平行分}) \times \text{统法}}{\text{月平行分}}$$

远地点到近地点半周,开始7日( $\frac{1}{4}$ 周)月实行慢于平行,次7日( $\frac{2}{4}$ 周)实行快于平行,即前半近点月内,月行一直在加快到近地点达到最大。所以进退衰前半近点月内全为进。但实月一直落在平月之后,朏脑积前半周全为脑。脑值在前 $\frac{1}{4}$ 周越来越大,损益率按朏脑积大小而言,故为益,但要注意此益为负值。第 $\frac{2}{4}$ 周,实月逐渐赶上平月,脑值越来越小,损益率为损,但此损为正。在近地点到远地点的后半周,月实行一直在减慢,故进退衰全为退。同时实月总在平月之前,故朏脑积全为朏。开始7日(近点月的第 $\frac{3}{4}$ 周),月实行大于平行,实月与平月拉开距离越来越大,脑值在增大,损益率为益,此益为正。近点月的第4个 $\frac{1}{4}$ 周,月速由平速继续变慢到远地点达到极小。这时实月与平月距离逐渐缩小,到远地点时重合。故朏值在减小、损益率为损,此损为负。

宣明历用来计算定朔望月亮改正的损益率、朏脑积仍如唐初

诸历一样,为以月每日平行来除月实行与月平行之差,其数再乘以统法得出。计算定朔弦望月亮改正完全袭用大衍历的方法。

在介绍麟德历时说过,历书上的朔望并不采用二次差内插算法推步。太阳、月亮改正皆用简单的线性内插得出。具体做法如下:

$$\text{太阳改正 } T = T_0 + t \frac{\Delta_1}{L_1}$$

$$\text{月亮改正 } S = S_n + s\delta_n$$

$$\text{定朔弦望时刻} = \text{平朔弦望时刻} + S + T$$

$T_0$  是所求朔前之定气朏脑值。 $t$  为定气到平朔的日数及小数。 $\Delta_1$ 、 $L_1$  是这个定气的损益率和长度。入历日乃平朔距其前远地点的日数,入历日超过历中日(13.77727),则减去历中日,用月离表的第二部分。 $S_n$  为入历日整数  $n$  的朏脑积, $s$  为入历日的小数部分。 $n$  为距远(近)地点的日数。 $\delta_n$  为距远(近)地点  $n$  日的损益率。平朔入历在  $0 \sim 1.0$  日用月离表 1 日的朏脑积和损益率数值。平朔入历  $1.0 \sim 2.0$  日用月离表 2 日的数值。入历  $ns$  则用月离表  $n+1$  日数值运算。计算中要注意损益率和朏脑积的正负号。

在月离表前半周,自远地点至近地点,其 7 日(距远地点  $6.0 \sim 7.0$  日)条下,历分为 1115,即是日月亮实行 1115 分,比平行慢 8 分。按损益率的组成,是日损益率为  $\frac{8}{1123} \times 8400 = 60$  (益、负)。但月亮在距远地点  $\frac{1}{4}$  周即 6.8887 日时实行等于平行,故这天从  $6.0 \sim 6.8887$  日损益率为  $60 \times 0.8887 \approx 53$  (益、负)。斯日剩下的时间即  $6.8887 \sim 7.0$  日月实行要比平行快,故这一段的损益率为  $60 \times 0.1113 \approx 7$  (损、正)。

在月离表的后半周,从近地点到远地点,其第 7 日(距近地点

6.0~7.0日)历分为1131,即是日月实行1131分,比平行快8分。其日损益率为60益(正)。月亮在距近地点6.8887日时实行、平行相等。与上类似可分析得出6.0~6.8887日损益率为53益(正),在6.8887~7.0日损益率为7损(负)。

所以在月离表的前后两半周历日7日条下损益率栏给出了“初益53,末损7”的数值。在表前所列基本常数中有这样两条:

7日 初数 7465 末数 935

14日 初数 6529 末数 1871

将7日、14日初末数,以统法8400除之分别得到0.8887、0.1113与0.7773、0.2227。它的意思就是将7日、14日各分作两部分。7日的两部分如上所述,6.0~6.8887日为初,损益率为初益53,6.8887~7.0日为末,损益率为末损7。但要注意,前后两半周损益的正负号是相反的。前半周益负损正;后半周益为正、损为负。7日分为初末,是因为6.8887日正好位于近地点与远地点的正中,月实行速正好与月平行速相等之时。

14日分为初末数,表示13.7773日正好为历中日,是近地点到远地点,或远地点到近地点的时间。13.7773~14.0日,即14日的末段0.2227日已进入近点月的另半圈。由月离表看出,前半周14日这天(13.0~14.0),月亮日实行1234分,比平行约快111分。由此可知是日的损益率为 $\frac{111.04}{1122.96} \times 8400 \approx 830.6$ 损(正)。月亮在13.7773日过近地点。13.0~13.7773日这一段为14日初段,它的损益率为 $831 \times 0.7773 \approx 646$ 损(正)。13.7773~14.0日这0.2227日为14日末段,已进入下半历周。下半周14日历分1012,比平行慢约111分。与上同样分析得知在13.0~13.7773日,14日的这一初段损益率为646损(负)。所以在月离表前后两半周14日损益率栏,都给出初损646的数值。

在计算定朔月亮改正时,若平朔月亮位于人历6.0~7.0或

13.0~13.7773 日,就需要特殊处理。在麟德、大衍等历法中都存在同样问题,且除 7、14 日外,21、28 日也需特殊计算。

经过分析,我们得出了宣明历计算 7 日、14 日月亮改正的如下算式(略去推导的中间过程)。

对于入历 6.0~6.8887 日者,有:

$$S = S_6(3172) + (1 - 0.5625 \times s) \times 119 \times s$$

入历 6.8887~7.0 日者:

$$S = S_6 + 53 - 7 \times \left( s - \frac{8}{9} \right) \times 9$$

入历 13.0~13.7773 日者:

$$S = S_{13}(646) + (789 + 53.3572 \times s) \times s$$

符号与原式朏朒积、损益率取法相同。

我们依据上述方法计算了宣明历施行的 71 年,自长庆二年(822)至景福元年(892)的定朔干支、时刻。经与现代方法计算的这 71 年 878 个月的平朔、实朔比较,宣明历推出的定朔比实朔平均要迟  $13^m.61$ (后天),精度是比较高的。878 个月定朔与真实合朔时刻相比,扣除系统差,误差大于  $70^m$  者共 50 个,占 5.7%。误差最大的为 873 年 5 月 30 日合朔,宣明历后天  $98^m$ 。宣明历定朔误差有个明显特点,定朔后天  $70^m$  以上者,全发生在 4 月中到 7 月中 3 个月内;定朔早于真朔,先天  $70^m$  以上者,全出现在 10 月中至次年 1 月中这 3 个月内,无一例外。误差与季节、月份有明确关系。说明定朔计算主要误差是因日躔表和太阳改正不够精确所致。经考查,宣明历月离表比大衍历精度有提高。日躔表与大衍历相当,较皇极历、麟德历有改进,但仍不够准确。用宣明历日躔表得出的定气时刻与真实天象相差有的可达半日。一般小寒至小暑(上半年,近地点到远地点段)计算的定气要早于真实天象(先天),而春分至芒种段失天最大。大暑到冬至(下半年,远地点到近日点段),定气要迟于天象(后天),而秋分到大雪段后天最

多。这两段正好与宣明历定朔误差较大的时段对应。而定朔失天的方向与此正好相反。另一方面,仅就一次项中心差引起的日月运动改正而言,宣明历太阳改正占的成分过大,月日改正比约为2,而合天的值应约为3。

宣明历与大衍等历都取冬至、夏至为近日、远日点时刻,在唐代这不十分准确。以公元822年为例。822年12月9日己酉9时10分过近日点,而冬至在12月17日19时58分。近日点在冬至前8日10时48分。宣明历入历与远地点也有误差。如历取822年12月16.056日过远地点,而实际天象约为822年12月15.362日,相差近千分。加上宣明历定朔计算中太阳月亮改正项仍用月平速作分母。凡此种都会对定朔计算带进一些误差。

宣明历术对进朔有明确规定。秋分后定朔小余如在0.75以上者则进一日,即朔日写成次日干支。春分后取其昏明小余与春分初日昏明小余之差,5分之,以减0.75,定朔小余在此数以上进一日。将每日夜半定漏用刻法通分即得昏明小余。这样可得出宣明历规定的进朔下限,定朔小余(即日的小数)大于此值者进日。数值如下:

秋分至春分	0.75000	夏至	0.74005
清明	0.74924	小暑	0.74031
谷雨	0.74479	大暑	0.74124
立夏	0.74276	立秋	0.74276
小满	0.74124	处暑	0.74479
芒种	0.74031	白露	0.74924

将计算得出的71年878个月的定朔,依据这个规定进位,得到的就应是宣明历书的历日。将它与汪曰桢《历代长术辑要》比较,878个月朔中有11个不同(相差1日),都发生在进朔的边缘状态。11个中有7个我们的计算结果与《资治通鉴》所收刘羲叟的《长历》(简称《目录》)相同,4个不同。即进朔后,我们有11个

朔日与《长术辑要》不同,内有 7 个与《目录》同,另外 4 个与《辑要》、《目录》都不同。我们的计算似与《目录》较接近,但仍有 4 朔有别。三家历谱有一定差异,谁是谁非,谁疏谁密,是进朔问题,还是计算问题,另外有没有别的原因,这些问题有待进一步考查。

目前已知,现存较完整的宣明历书是敦煌发现的唐乾符四年(877)历书刻本一种。原件藏伦敦大英博物院。缺卷首,存二月十日至年终。将用宣明历术计算得出的乾符四年定朔(含进朔)、平气与这份历书比较,历朔节气完全一致。有关宣明历定朔计算结果和乾符四年历书的考查比较等有关具体问题,有兴趣的读者可参看笔者有关论著。

## 第四节 日食月食的形成

### 一、日食月食性质不同

当围绕地球公转的月球走到太阳和地球中间时就形成日食;当月球在地球背后,被地球挡住了射到月面的日光时发生月食。可是日月食不是每月都有的。因为月球在白道上运行,地球在黄道上运行,黄道白道有  $5^{\circ}$  许的交角。只有朔望发生在交点附近时,才有日月食发生。

月距地平均 384000 千米,约当地距日的  $1/390$ 。月球、地球直径之比是  $272:1000$ ,与  $3:11$  相近。地球直径是 12757 千米,月球是 3473 千米。月球表面积为 3800 万平方千米,体积是 220 亿立方千米,约当地球体积的  $1/49$ ,而为太阳体积的  $1/64000000$ 。虽然月球比太阳小得多,但因它离我们近,所以从地球上看来,日月所张的角度(视角直径)却相差无几。

地球、月球本身都不发光。受太阳照射,在地、月背后都拖着一个圆锥形的阴影。地球影锥长度约为地球赤道直径的 108.5

倍,平均 1384000 千米。在月地平均距离 384400 千米处,地影锥的截面直径约为月球直径的两三倍(2.65)。而在月亮背后由日光形成的阴影锥长约为日月相距的  $1/400$ ,即平均 373540 千米。比月地的平均距离还稍小。月球绕地公转轨道是椭圆,偏心率是 0.055,约  $1/18$ 。如果用 18 厘米为椭圆长轴表示月球公转轨道,其椭圆两焦点间的距离只有 1 厘米,焦点离中心仅半厘米。但比地球轨道的偏心率 0.0167 稍大。故月轨要更扁长一些。因此,在近地点,月距地较近约为 363300 千米,因而从地球看月球的视直径较大,约当  $32'46''$ ;在远地点,月距地最远约为 405000 千米,月亮视直径较小,约为  $29'22''3$ ;平均 384400 千米,视直径  $31'04''$ 。另一方面,地球椭圆运动也有近有远。而日食时月距日越远月影锥就越长;日月距越小时,月影锥就越短。因此,有时月影锥长会出现比月地距要大的情况。即使在最长情况下,月影锥在地球表面形成截面的直径也只有 270 千米,很多情况下本影圆锥刚及地面或其延长线组成的伪本影圆锥扫过地球表面。

因此,日食、月食现象性质上是不同的。月食时,月亮进入地影是全部还是一部分不为日光照射,取决于望月入交的远近。对于看得见月亮的半个以上地球(月亮在地平线以上)上的人们,月食现象都是相同的。日食则不然,同一次日食各地见食的时间、食分都不一样。有的地方见全食环食,有的地方仅见偏食,偏食大小又不同,还有的地方根本看不到食,尽管食时太阳都处在地平以上。所以推算日食要比月食困难得多。因见食情况随地区而异,这样,仅计算交食的一般情况,如月食那样,就不行了。各地见食时刻、食分需一一计算。

古人不能确切了解月球运动,早期预报仅根据周期。我国汉代已按周期预报月食。在众多交食周期中,223 个朔望月 242 交点周最有意思。因月球轨道运动偏心率的关系,月行迟疾(偏离

平行)有时可达 $\pm 6^\circ$ 之多。实际上勿需差这么远就可使食不再发生。但这个223月的交食周期恰恰又与239个近点月相近。就是说经过这一周期朔望、入交、入转差不多都恢复到起始状态。即

$$223 \times \text{朔望月} \approx 242 \times \text{交点月} \approx 239 \times \text{近点月}$$

使得这一周期成了很有用的预测日月食的方法。

日食时,只有在月影锥接触地面的小范围里,人们才能看到全食或环食。全食环食也称中心食。中心食区宽度不过两三百千米。它在地面扫过的面积形成一个长条,叫中心食带。因月绕地公转拖着本影圆锥扫过地面,其速度比地球自转带着观测者前进还要快。月亮速度大约是每秒1千米,而地面上一点的自转不过三四百米(赤道上每秒465米)。所以本影在地球的截面迅速地向东奔驰。在月球的影子进入地球的起点(在西方),这时正是日出。通常五六小时后由于月亮运动和地球自转组合,月影在东方离开地面,是时那里已近黄昏,当地居民在日落时看到日食。在中心带两旁一较广区域,人们可以看到偏食。再远的地区,就看不到日食了。

月亮的视直径是变化的。出现日食时,它可能小到 $29'22''$ ,大到 $33'26''$ 。太阳视直径也随季节而有差异,可由 $31'28''$ ,大到 $32'32''$ 。所以月轮比日轮有时大有时小。如月亮在天顶,它与我们更加接近,它的视直径还要增大 $1/60$ ,最大可达 $34'$ 多。所以更有利于形成中心食。日食时,如月球圆面大于太阳,在月影中心轴线附近的观测者就看到全食。如月角直径小于太阳,即使月球视中心与太阳中心相合的时刻,太阳边缘仍未被遮住而形成日环食。这实际上是月本影锥顶点未达地球,其延长线包络的伪本影圆锥与地面接触形成的。这时在月影轴线附近看到环食,而在月球半影区域内的观测者看到偏食。



因为月球由西向东运动,所以日食从圆面的西(右)边开始亏缺。整个日食过程可延续两三个小时,但全(环)食时间只有几分钟(一般小于 $7^m$ )。因为月球圆面只略大于日面,很快就从它前面走过去了。月食是月亮进入地影圆锥,月球自西向东运动,所以月球东部(左)最先进入地影而亏缺。如月球全部进入地球本影圆锥便发生全食。如入交不深,月球仅在靠近地影边缘的地方进入本影则出现偏食。因地影圆锥截面约为月球圆面直径的2.65倍,所以月全食可以延续得比较久,长者可达120分钟。地球上任何地点月食的发生、终了都在同一时刻,食分也相同。钟表上的不同读数那是与各地经度有关的。

## 二、食甚时刻与实朔实望并不一致

日月食的食甚时刻并不与实朔实望时刻一致。对于发生在视正午的日食,食甚与日月赤经相合时刻接近。月食食甚与实望(黄经冲)、赤经冲的时刻均有差别。只有恰好发生在升降交点的日月食,食甚才与实朔实望的时刻相同。

在图9-1中, $M_0$ 、 $S_0$ 表示日食时实朔时刻月日的位置,它们的黄经(日月同)为 $L_0$ ,月的黄纬为 $b_0$ 。 $I$ 为黄道白道交角。虽有日食发生,但因这时日月未处于最近距离,而并非食甚时刻。月速大于日速。月日黄经运动速度比设为 $q$ 。在时间 $t$ 之前,当月行至 $M$ ,日走到 $S$ 时已达到月日距最小值 $D$ 。过 $M$ 作黄经圈,此 $L$ 、 $b$ 即为合朔前 $t$ 时的月亮的黄经黄纬。此时太阳黄经为 $L'$ , $\Omega$ 是月亮升交点的黄经。

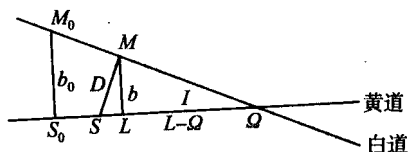


图9-1 日食食甚不与实朔同时

由球面三角知,当  $D$  边对角为直角时,有:

$$\cos D = \cos b \cos(L - L')$$

因  $I$  角很小,  $b$  仅  $0^\circ.5$  左右,此球面三角可视为平面直角三角形,近似有:

$$D^2 = b^2 + (L - L')^2$$

在球面直角三角形  $ML\Omega$  中,有:

$$\operatorname{tg} b = \sin(L - \Omega) \operatorname{tg} I$$

近似地用平面直角三角形得出:

$$b = (L - \Omega) \operatorname{tg} I, b_0 = (L_0 - \Omega) \operatorname{tg} I$$

所以

$$D^2 = (L - \Omega)^2 \operatorname{tg}^2 I + (L - L')^2$$

设  $l, l'$  为月、日黄经的每时变量,则有:

$$L = L_0 + lt, L' = L_0 + l't$$

842 代入  $D$  式,得:

$$\begin{aligned} D^2 &= (L_0 + lt - \Omega)^2 \operatorname{tg}^2 I + (l - l')^2 t^2 \\ &= (b_0 + lt \cdot \operatorname{tg} I)^2 + (l - l')^2 t^2 \end{aligned}$$

满足  $D$  为最小的条件是  $\frac{dD^2}{dt} = 0$ , 于是有:

$$(b_0 + lt \cdot \operatorname{tg} I) l \cdot \operatorname{tg} I + (l - l')^2 t = 0$$

$$t = \frac{-b_0 \cdot l \cdot \operatorname{tg} I}{(l \operatorname{tg} I)^2 + (l - l')^2}$$

代入上式,得出最小的  $D^2$  值为:

$$D_{\min}^2 = \frac{b_0^2}{1 + \left( \frac{l}{l - l'} \operatorname{tg} I \right)^2} = b_0^2 \cos^2 I'$$

因为  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$  的关系,令  $\operatorname{tg} I' = \frac{l}{l - l'} \operatorname{tg} I$ 。所

以  $D$  的最小值  $D_0$ ,可表示为:

$$D_0 = |b_0| \cos I'$$

$t$  就是视午日食食甚时刻对实朔的改正值。

$$\text{食甚时刻} = \text{实朔时刻} + t$$

月食的情况类似,可推出与上形式相近的改正值表示式。下面给出月食食甚时刻对实望时刻改正值  $t_m$  的另一形式,计算中直接使用。

$$\begin{aligned} t_m &= \mp 0^d.00402 \frac{B}{\Delta L} \\ &= \mp 0^d.00402 \times p \times \sin P / \Delta L \end{aligned}$$

$B$  为实望时月亮中心与地影中心的距离,以  $\frac{\pi - \pi'}{\pi}$  倍地球赤道半径为单位。 $\pi, \pi'$  为月、日的地平视差,  $p$  为计算辅助量,  $P$  为实望时月亮的升交距角。 $\Delta L$  为月亮相对于地影中心的每时速度在黄道方向的分量。也以  $\frac{\pi - \pi'}{\pi}$  倍地球赤道半径为单位。于是有:

$$\text{月食食甚时刻} = \text{实望时刻} \mp 0^d.00402 \frac{B}{\Delta L}$$

843

月亮升交距角  $P$  在第一、第三象限时,取负号;在第二、第四象限时,取正号。

日、月食总是发生在朔望,月亮中心常在日地中心的连线附近。因此,日、月食时日月距角  $\xi$ , 日食时约为  $0^\circ$ , 月食时几近  $180^\circ$ 。食时月亮黄纬必定很小,月必在轨道两交点之一附近。因此月的升交距角  $P$ , 大约近  $0^\circ$  或  $180^\circ$ 。即食时  $\xi, P$  等于或接近  $0^\circ$  或  $180^\circ$ 。与月、日平近点角  $g, g'$  各等于  $90^\circ$  对应的食叫平食;与月在近地点,日在远地点(即  $g = 0^\circ, g' = 180^\circ$ ) 对应的食叫近地食;与月在远地点,日在近地点( $g = 180^\circ, g' = 0^\circ$ ) 对应的食名叫远地食。近远地食是两种极端情况。

前面式中的  $l, l', b, p, P, \Delta L$  都可表示为三角级数。

$$\begin{aligned} l &= 2011'' + 258'' \cos g + 16'' \cos 2g - 1'' \cos \xi + 2'' \cos g' + 1'' \cos(g - g') + \cdots \\ l' &= 148'' (1 + 2e \cos g') \end{aligned}$$

$$b = -18520'' \sin(\lambda - \Omega) - 526'' \sin(2L' - L - \Omega) + \dots$$

$$\lg p = 0.71728 - 0.02769 \cos g + \dots$$

$$\lg \Delta L = 9.734161 + 0.3192 \cos g + \dots$$

$$P = P_0 - 0.0064 - 0.4125 \sin g - 0.1135 \sin(2g) + 0.0279 \sin(2g') + \dots$$

其中  $L'$ 、 $L$  为日、月平黄经,  $g'$ 、 $g$  为日月平近点角,  $\xi$  为日月距角 ( $L - L'$ ),  $\Omega$  是月亮升交点平黄经。  $\lambda$  乃月亮黄经, 可依下式求出:

$$\lambda = L + 22640'' \sin g + 769'' \sin 2g + 2370'' \sin(2\xi)$$

$$+ 668 \sin g' + 4586'' \sin(2\xi - g) + \dots$$

日月食时,  $2\xi \approx 0$ , 上式可简化, 其他各平值为:

$$L' = 279^\circ.696678 + 36000^\circ.768925T$$

$$L = 270^\circ.434164 + 481267^\circ.883142T$$

$$g = 296^\circ.104608 + 477198^\circ.849108T$$

$$g' = 358^\circ.475833 + 35999^\circ.049750T$$

$$\Omega = 259^\circ.183275 - 1934^\circ.142008T$$

$$\xi = 350^\circ.737486 + 445267^\circ.114217T$$

$$T = (JD - 2415020.0) / 36525 \text{ 为历书时。}$$

月食食甚时刻各地相同, 实望需加的改正量对各地皆适用。上列日食食甚时刻对实朔所加的改正指视午日食食甚时刻, 各地食甚时刻并不相同。一般地说, 在它西面食甚要早一些, 在其东要迟一点。因月球运动和地球自转组合, 月影在地面移动较快, 各地食甚时刻相差通常都要小于它们之间的经度差。

从以上讨论看出, 古历交食食甚时刻, 月食通常就为实望时刻; 日食虽认识到与实朔不同, 需加一定改正, 但仍将正午日食食甚与实朔视作一致。这些都是不够准确的。

## 第五节 视差对天体坐标的影响

不同地点观测同一地面目标, 所测得的目标方位是不同的。

同样,对于离我们较近的天体,例如太阳系天体,由于观测者空间位置的变化,它们在天球上的位置也不一样,这种现象天文学称作视差。

地面上的观测者随地球的自转和公转不断地改变自己的空间位置。不同位置上的观测者在同一时刻观测同一天体,测得的方位是不同的。同一观测者在不同时间观测同一天体,由于观测者的空间位置变了,所见天体的方位也有不同。天文学上讨论视差对天体坐标的影响,就是要解决如何从不同位置观测所得的天体坐标归算到同一个系统的问题。

视差分周日视差和周年视差。前者取地球中心为标准点,同一天体的地面坐标和地心坐标之差称周日视差。恒星的周日视差很小,因而周日视差主要用于讨论太阳系天体。对恒星,则取日心为标准点。同一天体的地心和日心坐标之差为周年视差。我们主要考查视差对日月食的影响,所以下面只讨论周日视差问题。

观测者在地面测得的天体方向和由地心测到天体方向之间的夹角,就是天体的视差。设地球为正球体。由图 9-2 看出,对于观测者 A,  $\angle ABO$ 、 $\angle AB_0O$  为同一天体在不同位置时的视差,分别以  $P$  和  $P_0$  表示。对于观测者  $A'$  来说,在同一时间观测天体 B, 它的视差为  $\angle A'BO$  或  $P'$ 。还可看出,视差随天体地平高度的变化而不同。当天体在天顶时,视差为零;而天体在地平线时,视差达到最大值  $P_0$ 。 $P_0$  称作地平视差。它的大小就是从天体上所见的地球半径所张的角度。月球距地最近,在各种天体中它的视差是最大的。对于行星,只在特殊情况下视差才会超过  $1'$ 。而月球视差平均约为  $57'.3$ 。这个角度即从月球上看地球半径的张角。因此月球上的观测者看来,地球的视角径为  $57'.3 \times 2$ , 即  $1^\circ 54'.6$ , 几近  $2^\circ$ 。

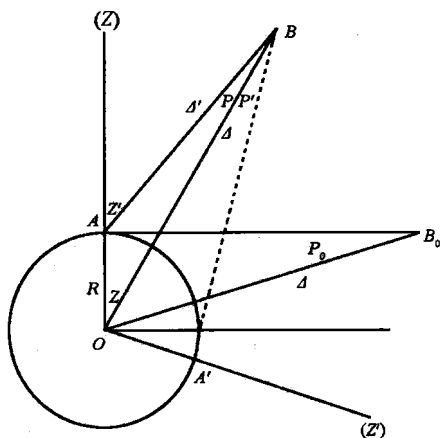


图 9-2 视差随天体高度而不同

用  $R$  表示地球半径,  $\Delta$  代表天体距离, 由图 9-2 得出:

$$\sin P_0 = \frac{R}{\Delta}, \frac{\sin P}{\sin Z'} = \frac{R}{\Delta}, P = Z' - Z$$

所以

$$\sin P = \sin P_0 \sin Z'$$

因  $P$  和  $P_0$  很小, 可以弧本身代其正弦, 故有:

$$P = Z' - Z = P_0 \sin Z'$$

因此, 视差按高度计算, 而与天顶距的正弦成正比。由  $\Delta = R/\sin P_0$ , 若已知地球半径  $R$  和地平视差, 就很容易算出天体的距离  $\Delta$ 。所以天文上要测天体的距离, 就是设法测定天体的视差。因为  $R$  为常数,  $P_0$  只与天体的地心距  $\Delta$  有关。所以天文年历中, 逐日列出日月行星的地平视差值, 由此可知每日它们的地心距。

地球不是正圆体而是椭球体。通常地心不处在观测者所在的铅垂线上。以观测者为中心的天球就有地心天顶与天文天顶之别。地心天顶指地心  $O$  与观测者  $A$  连线与天球的交点。天文天顶为地球上过  $A$  的铅垂线与天球的交点。对于北半球, 地心天

顶位于天顶之南(子午圈上)的  $\varphi - \varphi'$  角度处。这里  $\varphi$  为地理纬度,  $\varphi'$  是地心纬度。

地球是旋转椭球体。根据大地测量结果, 1967 年国际规定参考椭球的半长轴  $a$ 、半短轴  $b$  和椭率  $\epsilon = \frac{a-b}{a}$  的数值如下:

$$a = 6378160 \text{ 米}, b = 6356775 \text{ 米}, \epsilon = \frac{1}{298.25}$$

地理纬度  $\varphi$  是椭球的法线与赤道面之间的夹角。地心纬度是连接地心与观测者  $A$  的直线与赤道面所成的角度  $\varphi'$ 。它们之间有下列关系:

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{b^2}{a^2} \operatorname{tg} \varphi$$

令  $OA = a\rho$ ,  $OA$  是  $A$  点的地心距。 $\rho$  是与 1 很接近的数值。

在图 9-3 中,  $OA = a\rho$ , 以  $\zeta$  表示天体  $B$  的地心天顶距  $\Delta$  为天体的地心距,  $a$  为地球的赤道半径, 即椭圆半长轴。在  $\triangle ABO$  中, 有:

$$\sin P = \frac{OA}{\Delta} \sin \zeta' = \rho \frac{a}{\Delta} \sin \zeta'$$

前已得出  $\sin P_0 = \frac{R}{\Delta}$ 。因地球有椭率, 对地球表面上各点同一天体的地平视差不完全相等。它在赤道上有最大值。因此, 一般所说的地平视差是指赤道地平视差, 即地球赤道半径在天体处所张之角。故式中之  $R$  即地球赤道半径  $a$ 。

$P$ 、 $P_0$  都是小角, 可取角的弧度等于小弧的正弦。

于是有:

$$P_0 = \frac{a}{\Delta}, P = \rho \frac{a}{\Delta} \sin \zeta' = \rho P_0 \sin \zeta'$$

将图 9-3 投影到以  $A$  点为中心的天球上,  $A$  点有地心  $\phi'$  和地理  $\phi$  两种纬度, 有地心  $I'$ 、天文  $Z$  两个天顶。天体  $B$  的方向分别是

$ABS'$  和  $OBS$ 。 $S'$ 、 $S$  为与天球之交点。在  $\triangle ZZ'S'$  中, 已知  $ZZ' = \phi - \phi'$ ,  $ZS'$ 、 $\angle Z'ZS'$  分别为在  $A$  点测得的天体  $S'$  的天顶距和方位角。由此, 根据球面三角公式可解得  $Z'S'$ , 即  $\xi'$ 。将  $\xi'$ 、 $\rho$ 、 $P_0$  代入上式就可以计算出  $P$  值。

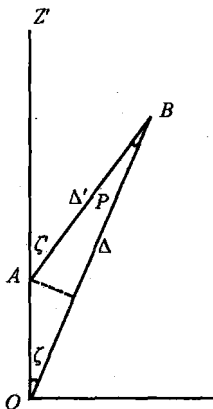


图 9-3 视差与地心天顶距的关系

视差改变了天体的方向, 也就改变了天体的坐标。天文年历和各种星历表提供天体的地心坐标。地面的观测者测定得出的是地面坐标。它们之间有一定差异, 对于月球相差最大。

由于地球是椭球体, 存在地心天顶和天文天顶之别, 但它们的距角不超过  $12'$ 。由此产生的方位角  $A$  (地平经度) 的视差可以忽略不计。即天体地心方向的指向点与天体在观测者眼里的指向点在地平经度方面的视差可略。视差主要表现在地平高度上的变化。即有:

$$\Delta A = 0, \Delta Z = \rho P_0 \sin \zeta$$

由地面观测所得的天顶距比地心天顶距大, 其差即为视差  $P$  这个角度。因此视差总是使天体的位置降低, 而不改变天体的地平经度。中国历法中称总周日视差为高下差。视差增加了视天顶距,



但是蒙气差却减少了它。蒙气差总是使天体的位置升高。视差使天体位置降低,因而推迟了天体出东地平的时间,而提早了西没的时间。也就是改变了上式中时角  $t$  的大小。由蒙气差  $R$  引起的时角改正值为:

$$\Delta t_1 = \pm \frac{R}{\sqrt{\cos(\varphi + \delta)\cos(\varphi - \delta)}}$$

由于蒙气差的折射作用,天体升时提早,没时推迟,所以没时取正,升时取负。

由视差引起的天体出没的时角改正值为:

$$\Delta t_2 = \pm \frac{P_0}{\sqrt{\cos(\varphi - \delta)\cos(\varphi + \delta)}}$$

因视差使天体升时推迟,下没提早,所以升时取正,没时取负。

天体在地平圈上时,天顶距为  $90^\circ$ 。所以由前式可以计算天体出没的时角  $t$ 。通常因天体的视差都很小,所以对天体的出没无有多大影响,可是会明显改变月亮的出没时间。因为它的视差平均  $57'$ ,超过蒙气差约  $22'$ 。综合这两方面相反的效应,月亮升没时角的改正值为:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \pm \frac{22'}{\sqrt{\cos(\varphi - \delta)\cos(\varphi + \delta)}} \\ &= \pm \frac{1^m 28^s}{\sqrt{\cos(\varphi - \delta)\cos(\varphi + \delta)}}\end{aligned}$$

升时取正,没时取负。

赤道坐标的视差可由总视差(高下差)推出。在图 9-4 中,设  $S$  为球面三角形  $PZ'B$  的星位角。 $B$  为天体的地心方向在天球的交点, $B'$  为观测者的视方向。 $BB'$  为总视差(高下差)  $P$ 。于是有:

$$\Delta \alpha \cos \delta = -P \sin S, \Delta \delta = -P \cos S$$

由弧三角形  $PBZ'$  有:

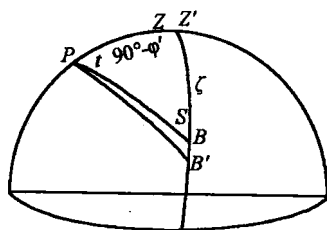


图 9-4 总视差与赤经赤纬视差

$$\sin \zeta \sin S = \cos \varphi' \sin t$$

$$\sin \zeta \cos S = \cos \delta \sin \varphi' - \sin \delta \cos \varphi' \cos t$$

由此得出：

$$\Delta \alpha = -\rho \cos \varphi' P_0 \sin t \sec \delta$$

$$\Delta \delta = -\rho \sin \varphi' P_0 \cos \delta + \rho \cos \varphi' P_0 \sin \delta \cos t$$

其中

$$\rho \cos \varphi' = C \cos \varphi, \rho \sin \varphi' = S_1 \sin \varphi$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{1 - (2\epsilon - \epsilon^2) \sin^2 \varphi}}, S_1 = (1 - \epsilon^2) C$$

将  $C$  展开到二阶项，最后得出：

$$C = 1.0016871 - 0.0016892 \cos 2\varphi + 0.0000021 \cos 4\varphi$$

$$S_1 = 0.9949530 - 0.0016778 \cos 2\varphi + 0.0000021 \cos 4\varphi$$

$$\rho = 0.9983200 + 0.0016835 \cos 2\varphi - 0.0000035 \cos 4\varphi$$

以上是根据  $a = 6378388$  米,  $b = 6356909$  米,  $\epsilon = \frac{1}{297.0}$  分析得出的。按上引的 1967 年国际参考椭球数据, 可由下式得出：

$$C = 1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{5}{16} \epsilon^2 - \left( \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{2} \right) \cos 2\varphi + \frac{3}{16} \epsilon^2 \cos 4\varphi + \dots$$

$$S_1 = 1 - \frac{3\epsilon}{2} + \frac{5}{16} \epsilon^2 - \left( \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^2}{2} \right) \cos 2\varphi + \frac{3}{16} \epsilon^2 \cos 4\varphi + \dots$$

$$\rho = 1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{5}{16} \epsilon^2 + \frac{\epsilon}{2} \cos 2\varphi - \frac{5}{16} \epsilon^2 \cos 4\varphi + \dots$$

也可简单由下式求得  $\rho \cos \varphi'$ 、 $\rho \sin \varphi'$ ：

$$\operatorname{tg} \varphi' = (1 - \epsilon) \operatorname{tg} \varphi_1, \operatorname{tg} \varphi_1 = (1 - \epsilon) \operatorname{tg} \varphi$$

$$\rho \cos \varphi' = \cos \varphi_1, \rho \sin \varphi' = (1 - \epsilon) \sin \varphi_1$$

由  $\Delta \alpha$ 、 $\Delta \delta$  的算式可知，当天体上中天时，视差不影响天体的赤经。知道了  $\Delta \alpha$ 、 $\Delta \delta$ ，经过简单换算就可将地心坐标  $\alpha$ 、 $\delta$  化为地面坐标，或反过来，由地面坐标得出地心坐标。

类似地我们可推出黄道坐标的视差  $\Delta \lambda$ 、 $\Delta B$  和白道坐标的视差  $\Delta l$ 、 $\Delta b$ 。中历往往将地平纬度（高度）上的总视差称作高下差，将月亮黄道、白道圈上的视差  $\Delta \lambda$ 、 $\Delta l$  称为东西差；黄经圈、白经圈上的视差  $\Delta B$ 、 $\Delta b$  叫作南北差。因月亮总在白道上运行而近黄道，交食又总发生在交点附近，白道东西差不像赤道  $\Delta \alpha$  需带  $\cos \delta$  这个因子。

因  $P$  很小，由图 9-3 可近似得出：

$$OA \cos \zeta = \Delta - \Delta'$$

$OA = \rho \alpha$ ，所以，两端以  $\Delta$  来除，得：

$$\frac{\Delta' - \Delta}{\Delta} = -\rho \frac{\alpha}{\Delta} \cos \zeta = -\rho P_0 \cos \zeta$$

设天体地面视半径为  $S'$ ，地心视半径为  $S$ ，因为近似地有天体视半径与距离成反比关系，即

$$S = \frac{r}{\Delta}, S' = \frac{r}{\Delta'}, S\Delta = S'\Delta'$$

所以

$$\frac{S' - S}{S} = \rho P_0 \cos \zeta$$

对于行星，这个关系毫无作用。对于太阳，设

$$S = 900'', \rho P_0 = 8''.8 = 0.000043$$

所以

$$S' - S = 0''.04 \cos \zeta$$

太阳在天顶时,其地面视直径比其地心视直径(在地平上观测的)大不到  $0''.1$ 。而月亮情况下,在日月食时,平均赤道地平视差取作  $3440'' = 0.0167$  弧度,月亮视半径约当  $0.2723P_0$ , 近  $937''$ , 于是有:

$$\frac{S' - S}{S} = 0.0167 \cos \zeta$$

$$S' - S = 15''.65 \cos \zeta$$

当月亮在天顶时,地面视半径要比地平观测的地心视半径大  $15''.65$ , 增大约  $1/60$ 。这个性质对日全食、日环食的讨论很重要。月在天顶时  $\zeta = 0$ 。

日食计算中,先计算合朔时日月的天顶距,求出高下差,再分解为东西差、南北差。根据对日月两心实相距的影响作用,判断食的有无,并改正见食时刻和食分。因视差使天体位置降低,对月球作用尤为显著。此外,日月在不同的轨道位置引起的视半径的变化,对见食情况也有影响。

## 第六节 视差对日食的影响和计算

日食时,不同地区的观测者看到的日月相对位置大有不同。食的時刻和见食情况也很相异。故需按经纬度一一计算。用视差方法计算日食的原理及具体做法简述如下。

### 一、推算需要的日食要素

日月赤经合时的日、月赤经	$a$	$A$
日、月赤经的每时变量	$a'$	$A'$
日、月赤纬	$d$	$D$
日、月赤纬的每时变量	$d'$	$D'$
日、月赤道地平视差	$\pi$	$\Pi$

日、月视半径

$s$        $S$

日用小写字母、月用太写字母表示。

## 二、计算月亮的赤经赤纬视差

由赤经、赤纬视差算式可知,当  $\varphi$ 、 $\delta$  一定时,周日视差主要由时角  $t$  来决定。太阳的时角就是视太阳时,即

太阳时角 = 所给定时间 - 太阳南中时刻

而月亮的时角,需要加上月亮运动的改正。

### (一)求任意时刻月亮的时角 $t$

由计算或查天文年历得出该日月亮南中时刻。令

$\tau$  = 所给定时刻 - 月南中时刻

则

$$t = \tau^\circ - \frac{A'}{4} \tau^h$$

$A'$  为用时秒表示的月亮赤经的每时变化。如取

$$\tau = 30^\circ (2^h)$$

$$\frac{A'}{4} \tau^h = A' (\text{时秒}) \times 2^h (\tau^h) / 4 = \frac{A'}{4} \tau^h (\text{角分})$$

化为度,则有

$$t^\circ = \tau^\circ (30^\circ) - \frac{A'}{4} \tau^h (\text{度})$$

如取  $A' = 153''.43$ , 则

$$\frac{A'}{4} \tau^h (\text{角分}) = 153''.43 \times 2^h (\tau \text{ 时}) / 4$$

$$= 76'.715 = 1^\circ.278583$$

$$t^\circ = 30^\circ - 1^\circ.2786 = 28^\circ.7214 = 28^\circ 43'$$

为计算上方便,  $\tau$  可取  $5^\circ$ 、 $10^\circ$ 、 $15^\circ$ 、 $20^\circ$  等整倍数角度。记住, 太阳时角即地方视时, 月亮时角需按此计算。

## (二)求与各时角对应的月的视差值

赤道坐标的视差可由总视差(高下差)推出:

$$\Delta\alpha\cos\delta = -P\sin S_1, \Delta\delta = -P\cos S_1$$

$S_1$  为星位角。在以地心天顶  $z'$  (与地心纬度  $\varphi'$  对应)、天体的地心方向在天球的交点  $B$  和北天极  $P$  组成的球面三角形中,与  $\widehat{Pz'}$  (即  $90^\circ - \varphi'$ ) 所对之角,即星位角  $S_1$ 。而

$$\Delta\alpha = -\rho\cos\varphi'P_0\sin t\sec\delta$$

$$\Delta\delta = -\rho\sin\varphi'P_0\cos\delta + \rho\cos\varphi'P_0\sin\delta\cos t$$

地面坐标表为  $\alpha', \delta'$ , 地心坐标  $\alpha, \delta$ 。计算视差影响月亮赤道坐标的准确公式为( $s$  是恒星时):

$$\operatorname{tg}(\alpha' - \alpha) = \frac{-\rho\cos\varphi'\sin P_0\sec\delta\sin(s - \alpha)}{1 - \rho\cos\varphi'\sin P_0\sec\delta\cos(s - \alpha)}$$

$$\operatorname{tg}(\delta' - \delta) = \frac{-\rho\beta\sin P_0\sin(r - \delta)}{1 - \rho\beta\sin P_0\cos(r - \delta)}$$

其中

$$\beta\sin r = \sin\varphi'$$

$$\beta\cos r = \cos\varphi' \frac{\cos\left[s - \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)\right]}{\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}$$

由此得出月亮的赤经、赤纬视差值  $\Delta\alpha\cos\delta$  和  $\Delta\delta$ 。

## 三、求观测者地面日月赤经相合时刻

日食根数给出地心赤经合的时刻。推出了地面坐标,就可以采用与求地心合同样的内插方法,计算得出观测者所见日月赤经合的时刻。具体做时,除内插算法外,还可采用作图法。

### (一)计算或用作图法求 $(A')$ 、 $(\alpha')$ 、 $(A)$

$(A') = A' \cos D$  为一小时后月亮赤经方向的变量。 $(\alpha') =$

$a' \cos d$  为一小时后太阳赤经变量。 $(A) = (A') - (a') = A' \cos D - a' \cos d$  为地心赤经合一小时后月日赤经差。

## (二) 作月亮相对太阳在赤经方向的位置图

在纸上作  $EL$  横线, 其上标注时刻, 与它垂直作纵直线, 其上用赤经分秒标示。 $EL$  上端为赤经增加方向, 下端反之。在  $EL$  上点出赤经地心合的时间  $H$  点, 通过  $H$  作  $OA$  直线。作法是, 在地心合后  $1^h C$  处, 向上作一垂线  $CD$ , 使其长等于上面得出的  $(A)$ ——日月赤经差的数值。 $OA$  即通过  $D$  与  $H$  的直线。直线  $AO$  上各点与  $EL$  的垂直距离表示在与时圈成直角, 即赤经方向, 月亮相对于太阳的位置。参见图 9-5。

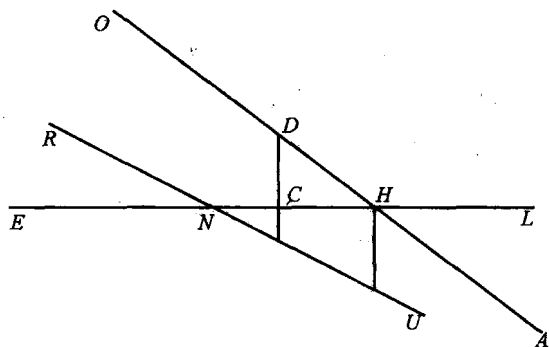


图 9-5 赤经视差图

## (三) 作赤经视差线

在  $EL$  线上各时刻点作垂线与  $AO$  相交。自交点选取长度等于与该时所当  $\tau$  度对应的赤经视差值  $\Delta \alpha \cos \delta(p)$  的各线段。线段方向这样确定, 如  $\tau$  在月南中以前 (即约当食在上午发生), 垂线作于  $AO$  上方; 南中以后作于下方。





月亮赤纬南,则取上方。中国、日本等国在北半球,纬度常比月的赤纬大(即北),故端点常在  $HO$  线的下方。

### (三)求观测地赤经合时日月间距离

将以上赤纬视差线段得出的各端点连成平滑曲线  $RU$ 。在  $EL$  线上,找出观测者所见日月赤经相合的时刻点  $V$ 。过  $V$  作垂线交于  $RU$  曲线上的  $N$  点。 $VN$  线段的长度,即为所求观测地赤经合时日月相距的角度变量。过  $N$  点作与  $EL$  平行的  $WG$  直线。

## 五、计算食甚、食分和初亏、复圆时刻

### (一)作太阳距月图

在纸上,以  $E$  为中心,  $s$  为半径作代表太阳的圆。在  $E$  的上方纵线上选取一点  $L$ ,使  $EL$  的长度与  $D-d$  相等,月的赤纬大于太阳赤纬,即月在太阳北侧,取  $L$  在  $E$  的上方;反之取下方。在直线  $EL$  上,取一点  $H$ ,使  $HL$  长度等于前面得出的  $NV$  ( $N$  在  $V$  下,取  $H$  在  $L$  下)。  $H$  点即观测者所见赤经合时月中心的位置。参见图 9-7。

857

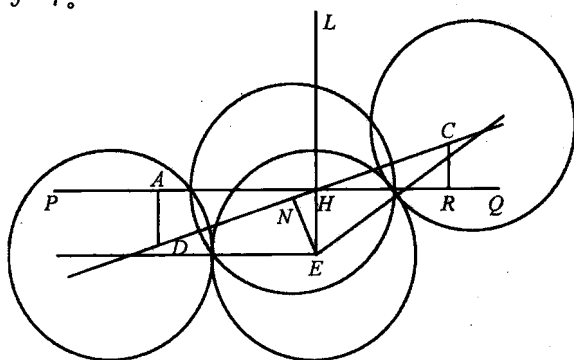


图 9-7 视差日食图解

## (二)过 $H$ 点作与 $LE$ 垂直的 $PQ$ 线

其上诸点(如  $A$  点)与  $H$  点的距离与赤经视差图(图 9-5)  $RU$  曲线上对应诸点与直线  $EL$  各垂线长度相等。而用对应的时刻表示。诸点分布在月南中前后稠密,距离远时疏散。也就是说  $PQ$  线上等时距各点并不等长。等时段在南中附近短,距离越远越长。

## (三)在 $PQ$ 线上各点作垂线

其长度由赤纬视差曲线  $RU$  上诸点与  $WG$  直线的垂直距离相等。例如,  $AD$ 、 $CR$ , 它们长度分别与赤纬视差图  $YT$ 、 $IS$  长度相等,但上下方向正好相反。即与赤纬视差图上  $RU$  曲线在  $WG$  直线的上下相反。把如此得到的各垂线端点,连成  $CHD$  平滑曲线。此即地球上相对于太阳、月亮移动的路径。曲线上各端点的位置可由  $PQ$  线上读出时间。

## (四)初亏、复圆时刻

由  $E$  点作  $CHD$  曲线的法线,与曲线交于  $N$  点。取  $N$  为中心,以  $S$  作半径画圆,它与太阳圆相交的两点,即为所求日月相切时的中心位置(初亏、复圆点)。它的时刻即初亏、复圆日食始终。以  $E$  为中心,以半径  $S+s$  作圆。此圆与  $CHD$  曲线相交。以此两交点为心,  $S$  为半径作两个圆。将  $E$  和这两个圆的中心连接,与  $CHD$  曲线(几为直线)成近似等腰三角形。 $EN$  为其垂足。直线  $EL$  与上述两中心连线(等腰两边)之夹角,以反时针方向量度,得初亏复圆的北极方向角。

## (五)食甚时刻、食分

$E$  作  $CHD$  垂线得垂足  $N$ ,  $N$  相应的时刻即食甚。 $\angle HEN$

为食甚方向角。由  $E$ 、 $N$  为中心所作的  $s$ 、 $S$  为半径的圆相交重合部分占日面的比例即为食分。

作图法得到的各地日食见食情况,食分可准确到 0.01,初亏、食甚、复圆时刻误差不超过分。图解法能得出这么精密的结果是意想不到的。为节省篇幅,具体算例略。

## 第七节 步轨漏术

大衍历晷漏表给出二十四定气交气时刻的陟降率、消息衰、阳城日晷、漏刻、黄道去极度、距中星度等六项数值。宣明历给出二十四定气的屈伸数、黄道去极度、阳城日晷、夜半定漏、距中星度等五项数据。后四种含义相同,大衍、宣明两历都是指交气初日的数值,而其值稍有不同。宣明历术文说,“爻统曰中统,象积曰刻法,消息曰屈伸。”因此,宣明历晷漏表中的屈伸数是与大衍历表中的消息衰相当的。

各历多作晷漏。大衍作轨漏。《大衍历议》说,“观晷影之进退,知轨道之升降,轨与晷名舛而义合,其差则水漏之所从也。总命曰轨漏。中晷长短谓之陟降。景长则昼短,景短则昼长。积其陟降谓之消息。”可见晷指影长、轨乃日轨。晷漏即轨漏,研究的是日影长短、轨道高低与时间(漏刻)之间的关系。

大衍历对雨水、清明、处暑、寒露 4 气的陟降率做了特殊安排。其余 20 气,在气内每日的陟降率都是相同的。前气陟降率与该气定气日数相乘,加前气消息衰,就得次气消息衰。即

各气消息衰 = 前气陟降率  $\times$  该定气日数 + 前气消息衰

依定气日数,每天都以陟降率陟减、降加其气条下的消息衰,满百进衰,得每日消息定衰。如气内第  $t$  日的消息定衰为:

第  $t$  日消息定衰 = 其气消息衰  $\pm (t-1) \times$  陟降率

(陟减,降加)

根据每日消息定衰,就可求出每日的漏刻、晷影长度、黄道去极度及距中星度。每日消息定衰是一个等差级数(一阶算术级数),其首项  $a$  即各气消息衰值,公差  $d$  即陟降率,交气后第  $t$  日(交气日不计入)的消息定衰,即为级数的第  $t$  项  $z = a + (t-1)d$ , 其和  $S_t$  为:

$$\begin{aligned} S_t &= \sum_1^t \text{消息定衰} \\ &= t \times \text{消息衰} + \frac{t(t-1)}{2} \times \text{陟降率} \end{aligned}$$

气内  $t$  日夜半漏定数

$$= \text{气初夜半漏} \pm \frac{1}{480} [t \text{ 消息衰} \pm \frac{1}{2} t(t-1) \text{ 陟降率}]$$

息减、消加,陟减、降加。陟降率满百进位为消息衰整数。

气内  $t$  日黄道去极度 = 气初去极度

$$\pm [t \text{ 消息衰} \pm \frac{t}{2} (t-1) \text{ 陟降率}]$$

(息减,消加)

$$\text{气内 } t \text{ 日距中星度} = \text{气初距中星度} \pm \frac{12386}{16277}$$

$$\times [t \text{ 消息衰} \pm \frac{1}{2} t(t-1) \text{ 陟降率}]$$

(息加,消减)

以冬至气为例,大衍历气内各日消息定衰、夜半漏、去极度及距中度的数值如表 9-2 所示。

宣明历步晷漏术记载非常简单,除中统、辰刻、昏明刻、刻法、距极度和北极出地度六项常数及晷漏表外,术文仅约 200 字。《新唐书·历志》说,宣明历“其气朔、发敛、日躔、月离皆因大衍旧术;晷漏、交会则稍增损之;更立新数,以步五星”。由晷漏表可看出,宣明历日晷、定漏、去极度及距中度数值确与大衍诸数稍有增

损。那么,其术是不是一样的呢?

表 9-2 大衍历冬至气内步轨漏各值

日序	消息 定衰	陟降率	$\Sigma$ 定衰	夜半漏 刻分	去极度 度分	$\frac{12386}{16277}$ $\times \Sigma$ 定衰	距中度 度分
初日	-0.64	0.78		27 230	115 20		82 26
1 日	-1.42	0.78	0.64	27 229	115 19	0.487	82 26
2 日	-2.20	0.78	2.06	27 228	115 18	1.568	82 28
3 日	-2.98	0.78	4.26	27 226	115 16	3.242	82 29
4 日	-3.76	0.78	7.24	27 223	115 13	5.509	82 32
5 日	-4.54	0.78	11.00	27 219	115 09	8.370	82 34
6 日	-5.32	0.78	15.54	27 214	115 04	11.825	82 38
7 日	-6.10	0.78	20.86	27 209	114 99	15.873	82 42
8 日	-6.88	0.78	26.96	27 203	114 93	20.515	82 47
9 日	-7.66	0.78	33.84	27 196	114 86	25.751	82 52
10 日	-8.44	0.78	41.50	27 189	114 78	31.579	82 58
11 日	-9.22	0.78	49.94	27 180	114 70	38.002	82 64
12 日	-10.00	0.78	59.16	27 171	114 61	45.018	82 71
13 日	-10.78	0.78	69.16	27 161	114 51	52.627	82 79
14 日	-11.56	0.3463	79.94	27 150	114 40	60.830	82 87
14.444 日	-11.91		84.98	27 145	114 35	64.666	82 91

根据“消息曰屈伸”,把宣明历屈伸数视如大衍历消息衰,宣明历没有给出陟降率,按大衍轨漏术可以求出各气陟降率,如冬至为11.03,小寒为9.58,大寒为8.13,立春为6.71,雨水为5.33,惊蛰为0,春分为5.23,清明为6.50,谷雨为7.74,立夏为8.92,小满为10.12,芒种为0。其值惊蛰前为降,春分后为陟,对应的屈伸

数为屈。夏至后为伸段，屈伸数值及陟降率与冬至后一一对应并完全相同。由此，如大衍历，可以求出每日的屈伸定数（定衰）。但这样做了以后，根据宣明历术文得不到夜半漏、去极度和距中度分正确的数值。此外，大衍历雨水、清明、处暑、寒露四气内陟降率逐日不等。宣明历屈伸数与大衍消息衰并不相等。它又并未另外给出数据和处理方法。如惊蛰、白露气依大衍历方法所得陟降率为0，芒种、大雪情况类似。这四气的屈伸定数该如何计算。凡此种种，可以看出，宣明历步晷漏术与大衍历是有所不同的。

宣明历将大衍历采用等差级数求和计算气内各日的夜半定漏、去极度和距中度的方法，简化为线性内插。各气屈伸数并非各气初日之值，而可理解为本气内插线段的斜率。我们依大衍陟降率的术语来介绍宣明历计算每日定衰及夜半定漏、黄道去极度及距中星度的方法。

以各定气日数除该气屈伸数得陟降率，以它作为等差级数的公差  $d$ ，首项  $a=0$ 。这样，各气内每日的屈伸定衰组成一首项  $a$  为0，公差  $d$  为陟降率（=该气屈伸数/定气长度）的一个等差级数。气内第  $t$  日（交气日不计入）的屈伸定衰（定数）为  $t$  与陟降率（公差  $d$ ）的乘积。求气内每日去极度分、夜半定漏、距中度分的算式为：

$$t \text{ 日去极度分} = \text{气初去极度分} \pm \frac{21}{25} \times t \text{ 日屈伸定衰}$$

$$= \text{气初去极度分} \pm \frac{21}{25} \times t \times \text{陟降率}$$

（屈减，伸加）

$$t \text{ 日夜半定漏} = \text{气初夜半漏} \pm \frac{5}{24} \times t \times \text{陟降率}$$

（屈减，伸加）

此式夜半漏刻分为百进制。

$$t \text{ 日距中星度} = \text{气初距中星度} \pm \frac{12386}{16277} \times \frac{21}{25} \times t \times \text{陟降率} \\ (\text{屈加, 伸减})$$

宣明历黄道去极度、夜半定漏、距中星度皆以刻法 84 为分母, 上述去极度、距中星度算式中第二项得数即以刻法为度母。故与气初去极度分、气初距中星度可以直接相加。夜半定漏算式中,  $\frac{5}{24} \times t \times \text{陟降率}$  得数为百进制, 要化为以刻法 84 为分母, 需乘以  $\frac{21}{25} (=0.84)$ , 即

$$t \text{ 日夜半定漏} = \text{气初夜半漏} \pm \frac{5}{24} \times \frac{21}{25} \times t \times \text{陟降率} \\ (\text{屈减, 伸加})$$

此式气初夜半漏的刻为 84 分。

以上算式中的陟降率数值皆为以定气长度除该气屈伸数之商。 $t \times \text{陟降率}$  即  $t$  日定衰。

宣明历用简单线性内插的方法代替大衍历采用的等差级数求和的方法, 既方便直观, 又避免了雨水、清明、处暑、寒露四气的繁琐计算。在宣明历术文中直接说将每日定衰 5 乘之, 24 除之, 曰漏差。屈减伸加气初夜半漏, 得每日夜半定漏。同样, 每日去极度分、距中星度都是以该日屈伸定衰乘以某个常数, 加减气初去极度分、距中星度分而直接得出。不像大衍历还需要一个累加累减的求和过程。现以冬至、小寒、大寒为例, 将宣明历计算气内每日屈伸定衰、夜半漏、去极度及距中星度的结果列于表 9-3、表 9-4 中。

表 9-3 宣明历冬至气屈伸定衰、夜半漏、去极度、距中度值

冬至 日序	屈伸 定衰	定衰 $\times \frac{21}{25}$	去极度 度分	定衰 $\times \frac{5}{24} \times \frac{21}{25}$	定漏 刻分	定衰 $\times \frac{21}{25}$ $\times \frac{12386}{16277}$	距中度 度分
初日	0	0	115 17	0	27 40	0	82 22
1 日	4.48	3.76	115 13	0.78	27 39.2	2.9	82 25
2 日	8.96	7.53	115 9	1.56	27 38.4	5.7	82 28
3 日	13.44	11.29	115 6	2.34	27 37.6	8.6	82 31
4 日	17.93	15.05	115 2	3.12	27 36.9	11.4	82 33
5 日	22.41	18.82	114 82	3.91	27 36.1	14.3	82 36
6 日	26.89	22.58	114 78	4.69	27 35.3	17.2	82 39
7 日	31.37	26.34	114 75	5.47	27 34.5	20.1	82 42
8 日	35.85	30.11	114 71	6.25	27 33.7	22.9	82 45
9 日	40.33	33.87	114 67	7.03	27 33.0	25.8	82 48
10 日	44.82	37.63	114 63	7.81	27 32.2	28.6	82 51
11 日	49.30	41.40	114 60	8.59	27 31.4	31.5	82 54
12 日	53.78	45.16	114 56	9.37	27 30.6	34.4	82 56
13 日	58.26	48.92	114 52	10.16	27 29.8	37.2	82 59
14 日	62.74	52.68	114 48	10.94	27 29.1	40.1	82 62
14.504 日	65.00	54.60	114 46	11.37	27 29.0	41.5	82 64



表 9-4 宣明历小寒大寒气屈伸定衰、去极度、定漏、距中度各值

	屈伸 定衰	定衰 $\times \frac{21}{25}$	去极度 度分	定衰 $\times \frac{21}{25} \times \frac{5}{24}$	定漏 刻分	定衰 $\times \frac{21}{25}$ $\times \frac{12386}{16277}$	距中度 度分
初日	0	0	114 46	0	27 29	0	82 64
1 日	15.39	12.93	114 33	2.7	27 26.3	9.8	82 74
2 日	30.77	25.86	114 20	5.4	27 23.6	19.7	83
3 日	46.16	38.78	114 7	8.1	27 20.9	29.6	83 10
4 日	61.55	51.71	113 78	10.8	27 18.2	39.3	83 19
5 日	76.93	64.64	113 65	13.5	27 15.5	49.2	83 29
6 日	92.32	77.57	113 52	16.2	27 12.8	59.0	83 39
7 日	107.71	90.49	113 40	18.9	27 10.1	68.9	83 49
8 日	123.09	103.42	113 27	21.6	27 7.4	78.7	83 59
9 日	138.48	116.35	113 14	24.3	27 4.7	88.5	83 69
10 日	153.87	129.27	113 1	27.0	27 2	98.4	83 78
11 日	169.25	142.20	112 72	29.7	26 83.3	108.2	84 4
12 日	184.64	155.13	112 59	32.4	26 80.6	118.0	84 14
13 日	200.03	168.05	112 46	35.1	26 77.9	127.9	84 24
14 日	215.41	180.99	112 33	37.7	26 75.3	137.7	84 34
4. 623 日	225.00	189.00	112 25	39.0	26 74	143.8	84 40

小寒日序

续表

	屈伸 定衰	定衰 $\times \frac{21}{25}$	去极度 度分	定衰 $\times \frac{21}{25} \times \frac{5}{24}$	定漏 刻分	定衰 $\times \frac{21}{25}$ $\times \frac{12386}{16277}$	距中度 度分
初日	0	0	112 25	0	26 74	0	84 40
1 日	24.76	20.80	112 4	4.3	26 69.7	15.8	84 56
2 日	49.52	41.60	111 67	8.7	26 65.3	31.7	84 72
3 日	74.28	62.40	111 47	13.0	26 61	47.4	85 3
4 日	99.04	83.19	111 26	17.3	26 56.7	63.3	86 19
5 日	123.80	103.99	111 5	21.7	26 52.3	79.1	85 35
6 日	148.56	124.79	110 68	26.0	26 48	95.0	85 51
7 日	173.31	145.59	110 47	30.3	26 43.7	110.8	85 67
8 日	198.07	166.39	110 27	34.7	26 39.3	126.6	85 83
9 日	222.83	187.19	110 6	39.0	26 35	142.4	86 14
10 日	247.59	208.00	109 69	43.3	26 30.7	158.3	86 30
11 日	272.35	228.78	109 48	47.7	26 26.3	174.1	86 46
12 日	297.11	249.58	109 27	52.0	26 22	189.9	86 62
13 日	321.87	270.38	109 7	56.3	26 17.7	205.7	86 78
14 日	346.63	291.18	108 70	60.7	26 13.3	221.6	87 10
14.742 日	365.00	306.60	108 55	63.9	26 10.1	233.3	87 21

大寒日序

晷影长短、夜漏大小、距中星度分全由太阳赤纬或去极度决定。距中星度指太阳在昏时距午的度分。夜半漏刻为夜漏的半数。所以

$$\begin{aligned}\text{全夜漏刻} &= 2 \times \text{夜半漏} \\ \text{昼刻} &= 100 \text{刻} - \text{全夜漏刻} \\ &= 100 \text{刻} - 2 \times \text{夜半漏}\end{aligned}$$

大衍历术说,各倍夜半漏为夜刻。以减百刻,余为昼刻。上面算式就是依此得出的。大衍、宣明皆规定昏明各二刻半,共五刻。将昏明五刻从昼刻内减去,得数为见刻。即从日出到日没的刻数。在夜刻内加进昏明 5 刻为没刻,是从日没到日出的刻数。即有:

$$\text{见刻(从日出到日没)} = \text{昼刻} - 5 \text{刻(昏明各 } 2.5 \text{ 刻)}$$

$$\text{没刻(从日没到日出)} = \text{夜刻} + 5 \text{刻(昏明 } 5 \text{ 刻)}$$

从子夜(夜半)到日出为半没刻,半没刻加半时辰,为从子初算起的日出辰刻。见刻加日出辰刻得日入辰刻。以 5 除夜刻,得每更差刻,再以 5 除,为每筹(点)差刻。以昏刻(2.5 刻)加日入辰刻,得甲夜初刻。再以更、筹差加之得五夜更、筹时辰。

$$\text{日出辰刻(自子初算起)} = \text{半没刻} + \text{半辰} \left(4 \frac{16}{84} \text{刻}\right)$$

$$\text{日没辰刻} = \text{日出辰刻} + \text{见刻}$$

$$\text{每更差刻} = \text{夜刻} / 5$$

$$\text{每筹差刻} = \text{夜刻} / 25$$

$$\text{甲夜(初更)初刻} = \text{日入辰刻} + \text{昏刻} \left(2 \frac{42}{48} \text{刻}\right)$$

距中星度为太阳在昏刻时距午(子午线)角度。倍距中星度以减周天,半之,为距子度。即昏刻太阳距子(下中天)的度数。距中度加距子度应为半周天度。即

$$\text{距子度} = (\text{周天度 } 365.2564 - 2 \times \text{距中度})$$

=半周天度-距中度

日没时太阳距午度即为太阳出没时间角，化为时刻应为半见刻，即太阳自午到没所行之度。有：

$$\text{日没时太阳距午星度} = \text{周天度} \times \frac{\text{半见刻}}{100}$$

它的数值化为  $360^\circ$  制，应与下式所得时角  $t$  相等：

$$\cos t = -\operatorname{tg} \phi \operatorname{tg} \delta$$

$\phi$  为观测地的地理纬度，宣明历取作  $34.475$  度，化为  $360^\circ$  制为  $34^\circ$ 。 $\delta$  为观测时太阳的赤纬。以冬至日为例。冬至时太阳赤纬约为  $-23^\circ.5$ ，代入上式，不考虑蒙气差和视差影响，得时角  $t$  为  $72^\circ.96$ 。而由宣明历周天度  $365.2564$  度和半见刻  $20.02$  刻得出的结果化为  $360^\circ$  制为  $72^\circ.08$ 。根据同样道理，可知太阳自午至昏所行之度为：

$$\text{距中星度(昏刻太阳距午度)} = \text{周天度} \times \frac{\text{半昼刻}}{100}$$

仍以冬至为例，得出冬至太阳昏刻距午度为：

$$\begin{aligned} \text{冬至太阳距中星度} &= 365.2564 \times \frac{22 \frac{44}{84}}{100} \\ &= 82.27 = 82 \frac{22.6}{84} \text{度} \end{aligned}$$

由每日的距中星度和距子度，根据其日太阳赤道宿度，可得出昏、晓中星的赤道宿度。即

$$\text{昏中星(赤道宿度)} = \text{其日赤道日度} + \text{距中度}$$

$$\text{旦中星(赤道宿度)} = \text{昏中星赤道宿度} + 2 \times \text{距子度}$$

昏中星即为甲夜初刻(初更初点)中星，加每更差度，得五夜(五更)中星。

赤道、黄道宿度是沿着赤道、黄道自西向东度量的，即按着与周日运动相反的方向计量。所以知道了太阳昏刻的赤道宿度加

上距中星度即得昏中星赤道宿度。旦(晓)中星指晨时(明刻)南中星辰(在上中天)的赤道宿度。距子度是昏时太阳离下中天的度数。子是视太阳子夜所处的方位。由昏至明太阳共走过的角度是2乘距子度,所以旦中星赤道宿度为:

$$\begin{aligned}\text{旦中星(赤道宿度)} &= \text{其日赤道日度} + \text{距中度} + 2 \times \text{距子度} \\ &= \text{昏中星赤道宿度} + 2 \times \text{距中度} \\ &= \text{其日赤道日度} + \text{距中度} + \text{半周天度}\end{aligned}$$

天文学上称太阳中心在地平下  $6^\circ$  的时刻为昏、明。日出、日入为太阳上下边缘与地平相切的时刻。考虑到太阳半径及蒙气差,所以日出、日入时太阳天顶距取作  $90^\circ 50'$ 。一般昏、明距日出、日没相当于太阳天顶距从  $90^\circ 50'$  到  $96^\circ$ , 约需时 25~30 分钟。大致当百刻制的两刻。大衍、宣明等历取昏明各 2.5 刻,约当太阳中心在地平下  $6^\circ 5' \sim 7^\circ$ 。此时太阳的天顶距约为  $96^\circ 5'$ 。不考虑大气折射和视差影响(对于太阳视差可不计),距中星度(即时角  $t$ )可由下式算出:

$$\cos z = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos t$$

其中  $z$  为太阳的天顶距,  $\phi$  为观测地的纬度,  $\delta$  为太阳赤纬。按此式也可根据由晷漏表得出的距中星度  $t$ , 求出与大衍历、宣明历昏明时刻相应的太阳在地平下的高度。

## 第八节 步交会术及日食三差

宣明历步交会术也基本沿用大衍旧术,唯法数稍有增损。它所创设的时气刻三差之法,尤为前历所未有。计算日月带食出没的方法也系首创,而为后世沿用。

大衍历与宣明历步交会术法数名称略有不同,其对应关系与数值如下(括号内为大衍名称):

终率(终数)228582.6512;交点月日分。

终日(交终) $27 \frac{1782.6512}{8400}$ 日:交点月日数。

中日(大衍同) $13 \frac{5091.3256}{8400}$ 日:为半交点月日数。

交朔日(朔差日) $2 \frac{2674.3488}{8400}$ 日:朔望月—交点月。

交望日(望数日) $14 \frac{6428.5}{8400}$ 日: $\frac{1}{2}$ 朔望月。

前准日(交限日) $12 \frac{3754.1512}{8400}$ 日:交望日—交朔日。

后准日(望差日) $1 \frac{1377.1744}{8400}$ 日: $\frac{1}{2}$ 交朔日。

阴历食限 6060。

阴历定法 404。

阳历食限 2640。

阳历定法 176。

交率 202。

交数 2573。

去交度乘数 11。

除数 7303。

食限、交率、交数及去交度与大衍历名同义同。

步交会术前面的计算程序,宜明历基本沿袭大衍历方法,仅所用数值不一而已。

#### 1. 推天正经朔及各朔望入交泛日及余

天正经朔加时入交泛日及余

$$=[(\text{通积分}-\text{天正闰余})/\text{交点月}]_R$$

式中的通积分为上元至所求年的积年与章岁乘积;天正闰余为冬至的月龄,即天正冬至距其前经朔的日数;朔积分即通积分与天

正闰余分的差值。 $R$  表示求余计算。

天正经朔入交泛日加交朔得次朔、加交望日得望日入交泛日及余。加得之数如大于终日(交点月),则去之。

## 2. 求朔望入交常日及入交定日

与大衍历相同,求出入交泛日后按以下方法得出入交常日和入交定日:

$$\text{入交常日} = \text{入交泛日} \pm \text{入气朏朏}$$

$$\text{入交定日} = \text{入交常日} \pm \frac{\text{交率}}{\text{交数}} \times \text{入转朏朏}$$

$$= \text{入交泛日} \pm \text{入气朏朏} \pm \frac{\text{交率}}{\text{交数}} \times \text{入转朏朏}$$

(朏减,朏加)

这个算法大衍历步交会术中已有。对此算式有时不易直接理解,现用天文方法稍做分析。

用  $T$ 、 $T_m$  分别表示定朔望、平朔望的时刻。以  $\lambda$ 、 $\lambda'$ 、 $N$  表示太阳、月亮和黄白道交点的真黄经。 $\lambda_m$ 、 $\lambda'_m$ 、 $N_m$  表示平朔望时它们相应的值。日、月的平黄经用  $l$ 、 $l'$  表示。则有:

$$\Delta l = \lambda - l, \Delta l' = \lambda' - l'$$

真合朔时,日月同经,它们与交点的角距(黄经差)为:

$$\begin{aligned} [\lambda - N]_T &= (\lambda_m - N_m) + \left[ \frac{d(\lambda - N)}{dt} \right]_m (T - T_m) \\ &= \lambda_m - N_m + \left[ \frac{d(\lambda - N)}{d(\lambda' - \lambda)} \cdot \frac{d(\lambda' - \lambda)}{dt} \right]_m \times (T - T_m) \end{aligned}$$

$T - T_m$  为实朔与平朔的时间差  $\Delta T$ 。前面在介绍由平朔计算定朔时曾指出,当略去小量  $\frac{d\Delta l'}{dt}$ 、 $\frac{d\Delta l}{dt}$  时,有

$$\Delta T = \left[ \frac{\Delta l}{dD} \right]_m - \left[ \frac{\Delta l'}{dt} \right]_m$$

的关系。那时我们所用的符号与现在稍有不同。上式中  $D$  为日月距角,其值可视为  $\lambda' - \lambda$ 。设日、月每日的平行度为  $s, m$ , 令交点向西逆行(年近  $20^\circ$ )每日的平行度为  $k$ , 结合上式则得出:

$$\left[ \frac{d(\lambda - N)}{d(\lambda' - \lambda)} \cdot \frac{d(\lambda' - \lambda)}{dt} \right]_m = \frac{s - k}{m - s} \left[ \frac{dD}{dt} \right]_m$$

$$\left[ \frac{dD}{dt} \right]_m = \frac{[\Delta l - \Delta l']_m}{\Delta T}$$

代入  $(\lambda - N)_T$  式内,稍做整理得出:

$$(\lambda - N)_T = (l - N_m) + (\lambda_m - l) + \frac{s - k}{m - s} [\Delta l - \Delta l']_m$$

以月平行度一日平行度  $(m - s)$  分别除上式两端得:

$$\frac{(\lambda - N)_T}{m - s} = \frac{l - N_m}{m - s} + \frac{\lambda_m - l}{m - s} + \frac{s - k}{m - s} \frac{[\Delta l - \Delta l']_m}{m - s}$$

左端即入交定日,右边第一项为入交泛日,与  $m$  相比  $s$  为小量。 $\lambda_m - l = \Delta l$ , 为平朔时真太阳与平太阳黄经差,即太阳盈缩分。而  $\frac{\Delta l}{m}, \frac{\Delta l'}{m}$  分别为入气朏脑和入转朏脑值。故

入交定日 = 入交泛日 ± 入气朏脑

$$+ \frac{s - k}{m - s} (\pm \text{入转朏脑} \pm \text{入气朏脑})$$

皆朏减、脑加。大衍历和宣明历在上式右端第三项中皆略去了入气朏脑。而交率/交数相当于  $\frac{s - k}{m - s}$ 。大衍历交数 4369, 交率 343;

宣明历交数 2573, 交率 202。大衍历、宣明历  $\frac{\text{交率}}{\text{交数}}$  值均约当

0.0785。月亮交点做逆向(自东向西)运动,移动周期约 6793 日,平均每年移动  $19^\circ 21'$ , 每日  $0^\circ.052996$ , 合中历  $0.053769$  度。因系反向运动,故  $k = -0.053769$  度。由此得出:

$$\frac{s - k}{m - s} = \frac{1.053769}{12.36875} = 0.085196$$



与计算定朔的太阳、月亮改正类似,大衍历、宣明历选取的交率/交数,实际上相当于略去了分母中的太阳日平行项。即

$$\frac{\text{交率}}{\text{交数}} = \frac{s-k}{m} = \frac{1.05377}{13.36875} = 0.0788$$

在皇极、大衍、宣明诸历中,皆是把交点月/食年=交率/交数使用。交点月/食年=0.0785。

### 3. 求月交入阴阳历

白道与黄道相交,交点称升、降交点。月亮通过升交点,从黄道南运行进入黄道北;再通过降交点,由黄道北而进入黄道南,重新回到升交点,完成一个交点月。月道在黄道北的半周称作阴历,月亮运行在黄道南的半周,叫作阳历。计算交食以月过降交点为起算点。朔望时入交定日如在中日以下(半个交点月),表示月过降交点后尚未到达升交点,月亮位于黄道之南,为入阳历。入交定日大于中日,说明月已过升交点,正在黄道北面的白道上运行,称月入阴历。这时,以中日减入交定日及余,所余为月入阴历的日及余。

### 4. 求四象六爻每度加减分及月去黄道定数

### 5. 求朔望夜半月行入阴阳、四象、六爻度数

4与5两条是计算月亮在白道上运行时离交点不同位置时月去黄道度数,及推算朔望夜半时实月距升降交点白道度数的方法。大衍历中已做了详细介绍。宣明历除因统法8400与大衍历不同,计算月去黄道度化为分母120的方法及月行入阴阳四象历度数值稍异外,余皆循大衍历术。这两步主要是考查朔望时月亮所处位置及是否入限。

### 6. 求时差、食定余

宣明历以加、气、刻三差来修正去交分,以判定是否有食及食分大小。时差用来修正定朔小余,得到食定余作为日食的食甚时刻。规定:

时差 =  $147 / \text{定朔日出辰刻距午正刻数}$

定朔日出、日入辰刻由步晷漏术求得。

如定朔小余小于半法(半统法 4200, 半日), 即定朔时刻在上午时,

初率 = 半统法 - 定朔小余

食定余 = 定朔小余 -  $\frac{\text{初率}}{\text{刻法}} \times \text{时差}$

= 定朔小余 -  $\frac{\text{半法} - \text{小余}}{\text{刻法}}$

$\times \frac{147}{\text{定朔日出辰距午正刻数}}$

= 定朔小余 -  $147 \times \frac{\text{定朔距午正刻数}}{\text{日出辰距午正刻数}}$

如定朔小余在半法以上, 即定朔在下午时,

末率 = 定朔小余 - 半统法

食定余 = 定朔小余 +  $\frac{2 \times \text{末率}}{\text{刻法}} \times \text{时差}$

= 定朔小余

+  $\frac{\text{小余} - \text{半法}}{\text{刻法}} \times \frac{2 \times 147}{\text{日没辰距午正刻数}}$

= 定朔小余 +  $294 \times \frac{\text{定朔距午正刻数}}{\text{日没辰距午正刻数}}$

因为  $\frac{\text{半法} - \text{小余}}{\text{刻法}}$ 、 $\frac{\text{小余} - \text{半法}}{\text{刻法}}$  皆等于定朔距午正刻数, 由食定余

算式看出, 定朔如在午正, 则上两式右边第二项皆为 0。说明宣明历认为午正合朔日食的食甚时刻即合朔时刻。前面我们曾介绍过, 除非日食确实正好发生在升降交点时才会如此。通常正午合朔时食甚与之仍有几分钟的差异, 就是说, 食甚时如太阳正好在当地子午线上南中, 此时与实朔时刻仍不完全一致。由食定余式还可看出, 当合朔时刻为日出、日没时, 则食甚时刻日出时比合朔

早 147/8400 日, 约当 25.2 分钟; 日没时食甚时刻要迟 50.4 分。

宣明历规定, 以定望小余为食定余, 即月食食甚与定望时刻同。前节已指出, 除正在交点食外, 食甚与实望时刻总有几到十几分之差。

### 7. 气差

宣明历称, 凡日食有气差、有刻差、有加差。三差中气差的数值最大, 为主要成分。气差在冬至、夏至其值 2350, 为极大。距二至前后, 每一日减少 26, 至春分、秋分为 0。  $\frac{2350}{26} = 90.385$  日, 与

宣明历 6 个节气的长度  $6 \times 15 \frac{1835 \frac{5}{8}}{8400} = 91 \frac{2613 \frac{3}{4}}{8400}$  大致相当。春分、秋分日气差当可减尽。

气差对入交定日、去交定分的改正作用为:

定数 = 朔日气差

$$\begin{aligned} & - \text{朔日气差} \times \frac{\text{食甚距午正刻数}}{\text{日出没辰刻距午正刻数}} \\ & = \text{朔日气差} \\ & \times \frac{\text{日出没辰刻距午正刻数} - \text{食甚距午正刻数}}{\text{日出没辰刻距午正刻数}} \end{aligned}$$

此定数, 春分后阴历加之, 阳历减之; 秋分后, 阴历减之, 阳历加之。

### 8. 刻差

二至初日无刻差。自后每日益 2.07 分。自立春至立夏, 起立秋迄立冬, 皆以 94.5 分为刻差。自后每日损  $2 \frac{10}{150}$  分 (2.07 分), 至冬至、夏至之初损尽。由此看出, 刻差值虽小于气差, 但其分布却与气差不同。春秋两季大, 冬夏两季小。刻差对去交分的改正作用为:

刻差定数=朔日刻差×食甚距午正刻数

冬至后食甚在午正前，夏至后食甚在午正后，阴历以减，阳历以加；  
冬至后食甚在午正后，夏至后食甚在午正前，阴历以加，阳历以减。

### 9. 加差

立冬初日后，每气增差 17，至冬至初日，共三气，得 51。此后每气损 17，终于大寒末，亦为三气，损尽。食甚在午正后，则每刻累益其差，阴历以减，阳历以加。

根据宣明历术，气、刻、加三差皆为线性变化。刻差在立春至立夏、立秋至立冬各六气内恒为常数。故可得出每日的气、刻、加三差数值。三差的作用为修正视白道上的去交度分，以调整交食的有无和深浅。

加差仅作用于立冬至大寒冬季六气，涉及的范围较小，后世亦不沿用。历法上影响不大。

日食因月影而生。月亮距地甚近，交食时，月亮的赤道地平视差可以在  $53'.95 \sim 61'.45$  之间变化。其视角半径变化于  $14'.7 \sim 16'.7$  之间。对日食的类型、食相、食分、时刻等见食情况会起很大作用。前节我们专门讨论了这个问题并介绍了用视差计算日食的方法。视差对日食有影响，皇极历已有所涉及，大衍历计算中有进一步发展，直到宣明历给出的日食三差。视差对天体的坐标（赤经、赤纬、黄经、黄纬等）有影响。现简单地讨论一下，月亮的赤经、赤纬视差对日食的影响。

赤经视差  $\cos\delta\Delta\alpha = -P_p \cos\phi' \sin t$ ，当月亮的时角  $t$  为 0 时，即当月亮南中时，它的赤经视差等于 0。当时角  $t$  为  $90^\circ$  时，赤经视差最大，其值为  $P_p \cos\phi'$ 。此外由视差引起的月亮赤经的改变，还随月亮的赤纬而变。当月亮的赤纬为 0 时， $\Delta\alpha = -P_p \cos\phi'$ 。月亮的赤纬变化非常复杂，不能简单地根据太阳的赤纬加减  $5^\circ 9'$  估计范围。需根据黄道赤道坐标换算公式计算得出。月亮的黄纬

总在 $\pm 5^\circ.3$ 之内变化,月亮赤纬可在 $\pm 28^\circ.68$ 内改变。太阳、月亮赤纬有时可相差 $50^\circ$ 以上。但日食时日月的赤纬一定是相近的。因此食时月亮赤纬最大也不会超过 $\pm 25^\circ$ 。月亮的赤道地平视差变化于 $53'.95 \sim 61'.45$ 之间。由于月亮视差引起的赤经变化,不同的观测地所见到的日月赤经相合的时刻不同。因而食甚的时间就不一样。食甚正好发生在当地子午线上(南中)的日食,其时刻与赤经合相近。由赤经赤纬视差公式看出,此时赤经视差为0。月亮时角 $t$ 越大,赤经视差越大,因而观测地的食甚时刻与地心赤经合的差距越大。

以唐朝都城长安为例(与宣明历晷漏术观测地纬度相近,约当 $34^\circ.1$ )。可算出长安的 $\rho \cos \phi'$ 值为0.8273, $\rho \sin \phi'$ 是0.5599,设日食时日月的时角 $t$ 为 $90^\circ$ ,月亮的赤纬 $\delta$ 为 $0^\circ$ ,这约当接近日出日没时刻食甚的日食。如这时又适值月亮的赤道地平视差值为极大值 $61'$ 。由上式可得出此时的 $\Delta \alpha = 0.8273 \times 61' = 50'.4592 = 3027''.55$ 。太阳的赤道地平视差一般在 $8''.65 \sim 8''.95$ 之间变化。约比月亮小400倍。与月亮比较,太阳赤经、赤纬视差可以忽略。按月赤经每小时 $100 \sim 165$ 秒变化量来估计,大约需时73~121分钟。这就是长安太阳出没前后食甚因赤经视差需增减的大致时间。当然赤经合并不与合朔(日月黄经相同)同时,一般要相差十多分钟,有时会相差三四十分钟。

再考虑 $\delta = 23^\circ.5$ 的情况。其他条件不变。

$$\begin{aligned}\Delta \alpha &= 0.8273 \times 61' \times \sin 90^\circ / \cos 23^\circ.5 \\ &= 56'.76 = 3405''.53\end{aligned}$$

同样,按月赤经每时变率 $100'' \sim 165''$ 来估计,大约需时 $82.6 \sim 136.2$ 分钟。

如计算山西阳城的情况(日本有的学者认为此为宣明历观测地)。阳城经纬度取作 $112^\circ.5$ 和 $35^\circ.5$ ,可得出 $\rho \cos \phi'$ 是0.81352,

$\rho \sin \phi'$  为 0.5796。当  $t=90^\circ$ ,  $P=61'$ ,  $\delta=0^\circ$  时,

$$\Delta \alpha = 0.81352 \times 61' = 49'.625 = 2977''.48$$

当  $P=61'$ ,  $t=90^\circ$ ,  $\delta=23.5^\circ$  时,

$$\Delta \alpha = 0.81352 \times 61 / \cos 23.5^\circ = 3246''.77$$

按月赤经每时变量  $100'' \sim 165''$  计,前者需时  $72^m \sim 119^m$ ,后者为  $79^m \sim 130^m$ 。

赤经视差主要改变观测者所见到的日月赤经相合的时刻,合朔时刻距午时越远,即  $t$  越大,观测地所见日食的食甚时刻与合朔时刻相差越大。赤纬视差主要影响观测者得出的日月赤经相合时刻日月之间的距离,从而使不同的观测地点见到的日食食分有不同的 大小和深浅。

由赤纬视差。

$$\Delta \delta = -\rho P \sin \phi' \cos \delta + \rho P \cos \phi' \sin \delta \cos t$$

可看出,它与观测地纬度、日食时月亮的赤纬  $\delta$ 、时角  $t$ 、赤道地平视差  $P$  有关系。日食时日月赤纬相近,通常在赤经合时相差不足  $1^\circ$ ,  $\delta$  总在  $\pm 25^\circ$  以内变化。由长安、阳城的  $\rho \cos \phi'$ 、 $\rho \sin \phi'$  值可看出,对于中原地区  $\rho \cos \phi' / \rho \sin \phi'$  值不超过 1.5。纬度越高,比值越小。而日食时月亮赤纬不会超过  $\pm 25^\circ$ 。对于小角来说,余弦的值,总大于正弦的值( $45^\circ$  的正弦、余弦数值相等)。 $\cos t$  值最大为 1。所以赤纬视差的两项中,对于中原地区的日食而言,第一项总大于第二项。若  $\delta=0^\circ$  或  $t=90^\circ$  时第二项为 0。当  $\delta$  为正值时,第二项的符号与第一项相反,从而使赤纬视差值减小。当日食时  $\delta$  值为负时,赤纬视差值两项同号,因而增大。日食时日月赤纬相近。因此,基本上从春分到秋分这半年,日食时月亮的赤纬视差值相对较小;从秋分到春分,月亮的赤纬视差值相对较大。而赤纬视差值又与日食时的时角  $t$  (约当合朔时的距午正时刻) 有关系。日食正好发生在午刻( $t=0$ ),第二项其值最大; $\delta$  为正值极大

时,赤纬视差值最小; $\delta$ 为负值极大时,赤纬视差值最大。赤纬视差与 $\delta$ 、 $t$ 的关系,列于表9-5。

表9-5 赤纬视差与 $\delta$ 、 $t$ 的关系

观测地	长安 $P=61'$				
$\delta$	$0^\circ$	$23^\circ.5$		$-23^\circ.5$	
$t$		$0^\circ$	$45^\circ$	$0^\circ$	$45^\circ$
$\Delta\delta$	$-2049''.2$	$-671''.9$	$-847''.3$	$-3086''.7$	$-2733''.0$
观测地	阳城 $P=61'$				
$\delta$	$0^\circ$	$23^\circ.5$		$-23^\circ.5$	
$t$		$0^\circ$	$45^\circ$	$0^\circ$	$45^\circ$
$\Delta\delta$	$-2121''.3$	$-758''.2$	$-1105''.9$	$-3132''.6$	$-2784''.9$

太阳视角半径随轨道运动变化于 $15'.7 \sim 16'.3$ 间,而月亮视角半径则在 $14'.7 \sim 16'.75$ 间改变。日食只有当在视日月相距最近要小于日月两角半径之和时才会发生。而由讨论可知,月亮赤纬视差,对于中原地区,通常总在 $10'$ 以上,有时可达50余角分。而日月视半径之和最大不过 $33'$ 许。可见视差对于日食的有无和食分的深浅关系极为密切。

现在回到宣明历的时差和气差、刻差、加差问题上来。时差基本上可与上面所述的赤经视差对应。食定余算式告诉我们,对于午正合朔的日食,食甚时刻等于定朔时刻。随着距午时刻的增加,食甚和定朔时刻差加大。日出、日没差距最大。这个关系与前面关于赤经视差的讨论结果是一致的。只有两点稍有不同:①宣明历给出的食甚、合朔时刻差,尤其日出、日没合朔与食甚相距数值偏低;②日出时食甚时刻比合朔早 $\frac{147}{8400}$ 日,而日没时食甚

迟 $\frac{294}{8400}$ 日,可能与实际有些偏离。

宣明历气差、刻差、加差数值皆与节气有关。当观测地一定时,由赤经、赤纬视差算式可看出,视差对食甚时刻和食分的影响与月亮赤纬和时角两个因素有关系(月亮赤道地平视差可看成常数)。月亮赤纬十分复杂,但日食时日月赤纬一定是相近的。由太阳赤纬可知,日食时月亮赤纬与季节有明确的关系。因此宣明历日食三差皆与季节有关是合理的。三差数值只与节气有关,但其改正食差的定数中却皆包含了食甚距午正刻数(时差、刻差并与日出没辰刻距午正刻数有关,后者显然又表示了与季节之间的关系)。这说明,宣明历已认识到视差对食分的影响中,除月亮赤纬(依靠节气)外,还与时角 $t$ 有关系。这是宣明历认识上的很大进步。

前面说过,赤纬视差,当秋分至春分,冬至前后这半年,相对较大。宣明历的加差,由此看来,也并非没有道理。只是对午正前合朔的日食没有影响,有些令人费解。因为对于午前午后的同一时角 $t$ 值,它的余弦值及符号是一样的。

将宣明历的气差、刻差定数的算式与赤经、赤纬视差比较看出,刻差定数与赤经视差、气差定数与赤纬视差比较接近。所以朱文鑫先生称气差为南北差,刻差为东西差。南北差即地平经圈上的总视差(高下差)在赤经圈上的分量,东西差为高下差在赤纬圈上的分量。赤经视差

$$\cos\delta\Delta\alpha = -P\rho\cos\phi'\sin t$$

与

刻差定数=朔日刻差 $\times$ 食甚距午刻度

形式相近。食甚在午正,相应的月亮时角为0,刻差定数等于0,赤经视差也为0。但刻差值在冬夏二至是0,而视差对赤经的影响,在二至却为最大值。另外,宣明历的刻差数值相对气差为小,



而赤经视差除午时为 0 外,其值随距午度的正弦而增大,与赤纬视差属同一量级。

$$\begin{aligned} \text{气差定数} &= \text{朔日气差} \left( 1 - \frac{\text{食甚距午正刻数}}{\text{日出没辰刻距午正刻数}} \right) \\ &= \text{朔日气差} \times \\ &\quad \frac{\text{日出没辰刻距午正刻数} - \text{食甚距午正刻数}}{\text{日出没辰刻距午正刻数}} \end{aligned}$$

$$\Delta\delta = -P\rho\sin\phi'\cos\delta + P\rho\cos\phi'\sin\delta\cos t$$

春分后、秋分后气差定数数值相近,符号正好相反。日食时日月赤纬相近(月食时日月赤纬数值相近,符号相反)。春分后赤纬为正,秋分后赤纬为负,故符号相反。定数,食甚在午正时数值大,食甚在日出没时数值为 0。二分时气差及气差定数为 0。可看出,气差定数与  $\Delta\delta$  赤纬视差算式比较接近,因二分时  $\delta$  近 0,尤其与第二项基本一致。由气差定数中与日出没辰刻距午正刻数关系可知,春分后因  $\delta$  为正,日出没距午刻数,大于秋分后,所以气差定数数值,春分后比秋分后相应日期为大。

综上所述,可以看出,宣明历创立的日食时差、刻差、气差、加差进一步定量地描述了日食时月亮视差对日食见食情况的影响。虽然它的数值还不够准确,加减正负的安排还有些值得改进的地方,但通过以上分析,可知,它对日食计算确是一次重要的发展和改进。

#### 10. 去交前后定分、去交度数

入交定日及分,如小于后准日( $1\frac{1337.1744}{8400}$ 日)或大于前准日( $12\frac{3754.1512}{8400}$ 日),为入食限。

望入食限,则出现月食;朔入食限,如月在阴历(即在黄道北,升交点至降交点的半周内),则有日食发生。很容易知道,所入食限,若在后准日以下,是在交后;若在前准日以上,必在交前。由

前述法数定义知,前准后准与前后二交点的距离是相等的。入交定日大于前准日以减中日( $13 \frac{5041.3256}{8400}$  日)为交前定日分;入交定日小于后准日为交后定日分。各乘以统法为去交前后定分。以 11 乘,7303 除,得去交度数。即

$$\text{去交度数} = \frac{11}{7303} \times \text{去交前后定分}$$

### 11. 食差及去交真定分

视差使观测者看到的月亮位置改变了,使它的视位置比地心位置偏南(即降低了月亮的高度,加大了天顶距)。前面我们就视差对日食食甚时刻及食分影响做了半定量的分析。简单地说,对于阴历,月亮处在太阳北面,视差使月亮视位置降低与太阳更接近了;对于阳历,月亮位于太阳之南,视差使月与太阳的距离拉大。只有当日月两心相距的角度小于日月视半径之和,即  $33'$  以内时,才会有日食发生。月亮视差在某些情况下可使赤纬南移五十余分,一般也有十几、二三十分。因此,对于阴历,月处黄道北,食限增加,日食可发生在月距交点较远处;相反,对于月处黄道南的阳历,因视差增大了日月视距,使发生日食的机会减少。

视差对阴阳历日食食分的影响,宜明历用食差来表示。宣明历的气差、刻差、加差其大小、符号各随季节、时刻、阴阳历而异。加减号,同名相加,异名相减。其食差即为三差定数的代数和:

$$\text{食差} = \pm \text{气差} \pm \text{刻差} \pm \text{加差}$$

去交定分经过食差改正,为去交真定分,即

$$\begin{aligned} \text{去交真定分} &= \text{去交定分} \pm \text{食差} \\ &= \text{去交定分} \pm \text{气差} \pm \text{刻差} \pm \text{加差} \end{aligned}$$

如食差为减号(负值),其绝对值大于去交定分,这时分月在阴历、月在阳历两种状态、四种情况予以讨论。

①月在阴历、交前,以去交定分减食差,减余为阳历交后真定

分。因去交定分小于食差,故减余视月所在真去交定分已在交点以南。

②月在阴历、交后,以去交定分减食差,减余为月在阳历交前真定分。

这两种情况,视月皆入阳历(黄道南),由前所述,皆没有日食发生。

③月在阳历、交前,以去交定分减食差,减余为月在阴历交后真定分。

④月在阳历、交后,以去交定分减食差,减余为月在阴历交前真定分。

后两种情况,经过视差改正,视月皆入阴历,且在交点近旁,显然皆有日食发生。

至于具体见食情况、食分深浅,皆须由食限数值和计算食分得出。

## 12. 阴阳历食限和日食食分

阴历食限 6060      阴历定法 404

阳历食限 2640      阳历定法 176

如去交真定分小于阳历食限,为阳历食。以阳历定法 176 除去交真定分,得食分。即

食分  $G = \text{去交真定分} / \text{阳历定法 } 176$

全食食分为 15。阳历定法 176 与 15 相乘得阳历食限 2640。

若去交真定分在阳历食限以上,以阳历食限减去交真定分,所得为阴历食。地心及观测地所见食甚时的月亮皆在黄道以北。以阴历定法 404 除去交定分与阳历食限之差,以减 15,余数即为食分  $g$ 。即

食分  $g = 15 - \frac{\text{去交真定分} - \text{阳历食限 } 2640}{\text{阴历定法 } 404}$

日全食食分为 15。去交真定分为阳历食限 2640 时,为日全食。

因阴历定法 404 乘 15 为阴历食限 6060。去交真定分为阴历食限、阳历食限之和 8700 时,从上式看出,其时食分  $g$  为 0。

由此可得出,宣明历阴历日偏食、日全食食限为:

$$\text{阴历偏食食限} = 8700 \times \frac{11}{7303} = 13.10 \text{ 度}$$

大衍历说,大抵去交 13 度以上,虽入食限为涉交数微,光景相接,或不见食。宣明历与此相符,并给出了确切的日偏食食限。

$$\text{阴历日全食食限} = 2640 \times \frac{11}{7303} = 3.98 \text{ 度}$$

由宣明历气差、刻差、加差数值和定数算式知道,当春分秋分(其时日食月亮的赤纬近于 0)及食甚发生在午正时,气差、刻差、加差皆为 0。此时由入交定分确定的阴阳历食限为:

$$\text{阴历食限} = 6060 \times \frac{11}{7303} = 9.13 \text{ 度}$$

$$\text{阳历食限} = 2640 \times \frac{11}{7303} = 3.98 \text{ 度}$$

根据月亮赤纬视差

$$\Delta\delta = -P\rho\sin\phi'\cos\delta + P\rho\cos\phi'\sin\delta\cos t$$

日食时月亮赤纬  $\delta$  只可能在  $-25^\circ \sim +25^\circ$  之间变化,赤纬视差总不为 0,并常为负值,即总使月亮的赤纬向南。即对于月在黄道南的阳历食,总使月亮远离黄道,故食限总要小于阴历食。这就是大衍历虽然冬至差积为 0,宣明历即使气、刻、加三差定数皆为 0 的情况下,阴历、阳历食限不等,且阴历食限总大于阳历食限的原因。

### 13. 日食泛用刻分、定用刻数及初亏复满时刻

将食分以 18 乘之,以 15 除之,商为刻数,不尽以刻法 84 乘之,以 15 除之,为分。所得即为泛用刻数及分。

泛用刻数与日食其日入转损益率相乘,以统法除之,得数加减泛用刻数值,得定用刻数:

$$\text{定用刻数} = \text{泛用刻数} (1 \pm \frac{\text{入转损益率}}{\text{统法}})$$

按月离表，朏时损为减、益为加；朏时损为加、益为减。定用刻数即日食从初亏至复满持续的时间。半定用刻是初亏至食甚或食甚至复满的时间间隔。因此有：

$$\text{亏初时刻} = \text{食定余辰刻(食甚)} - \frac{1}{2} \text{定用刻数}$$

$$\text{复满时刻} = \text{食甚辰刻} + \frac{1}{2} \text{定用刻数}$$

#### 14. 月食食分

凡月食去交定分在 2147 以下，为月全食；大于 2147，则以去交定分减后准  $1 \frac{1337.1744}{8400}$  (= 9737.1744 分)，减余以月食定法 506 除，商为食分 G。即

$$\text{月食食分} = (\text{后准 } 9737.1744 - \text{去交定分}) / 506$$

$$\text{后准 } 9737.1744 = 15 \times 506 + 2147.1744$$

由此得出，月全食与月偏食的食限(根据宣明历去交度乘数  $\frac{11}{7303}$  计算)为：

$$\text{月全食食限} = 2147 \times \frac{11}{7303} = 3.23 \text{ 度}$$

$$\text{月偏食食限} = 9737.1744 \times \frac{11}{7303} = 14.67 \text{ 度}$$

#### 15. 月食泛用、定用刻数及初亏复满时间

凡月全食，泛用刻为 20；如去交定分在 1435 以下，再增半刻为 20.5 刻；若去交定分小于 712，又增半刻为 21 刻。依大衍历偏食泛用刻见表 9-6。

表 9-6 大衍历偏食泛用刻

食分	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
泛用刻	0	4	5	6	7	8	10	11	12	13	14	16	17	18	19	20

定用刻数为初亏至复圆距时,求法同日食。

$$\text{定用刻数} = \text{泛用刻数} (1 \pm \frac{\text{其日入转损益率}}{\text{统法}})$$

朏时损为减、益为加;朏时损为加、益为减。

月食食甚时刻即定望小余,所以

$$\text{亏初时刻} = \text{定望时刻} - \frac{1}{2} \text{定用刻数}$$

$$\text{复圆时刻} = \text{定望时刻} + \frac{1}{2} \text{定用刻数}$$

#### 16. 求日月带食出没

宣明历首创推求日月带食出没的方法,为后世历法所沿用。

(1)先不考虑日出入,计算出这次交食的定用刻数、食甚时间及食分。

(2)根据步晷漏术,求出其日太阳出入时刻,并计算日出(入)至食甚的时间间距。

(3)日月带食出没分两种情况:可见食甚及不可见食甚,分别予以计算。

(4)可见食甚情况下,日月食实际上不可见的时段长度为半定用时内减日出(入)至食甚时刻间距。半定用时为亏初至食甚或食甚至复满的时间。即在可见食甚情况下:

$$\text{不可见刻} = \text{半定用时} - \text{日出(入)至食甚时间}$$

(5)不可见食甚情况下,日月食可见时段长度为半定用时内减日出(入)至食甚时距,即

$$\text{见刻} = \text{半定用时} - \text{日出(入)至食甚时距}$$

不可见食甚的见刻和可见食甚的不可见刻皆小于半定用刻。

#### (6) 计算日出入时所见日月带食的食分

仅当日出(入)时刻恰为交食食甚情况下,可见带食为食甚食分。通常因上述的“不可见刻”、“见刻”皆小于半定用刻,所以日出没时所见带食食分均小于食甚食分。

可见食甚时,日出(没)时可见日月带食食分为:

$$\text{带食食分} = \text{不可见刻} \times \text{食甚食分} / \text{半定用刻}$$

不可见食甚情况下:

$$\text{带食食分} = \text{见刻} \times \text{食甚食分} / \text{半定用刻}$$

可见食甚情况下,日月食实际见刻大于半定用刻。即亏初在日出(没)前,或复满在日没(出)后。日出(没)时,食分正扩大,日没(出)时食分正减退(括号内字为月食的情况,下同)。

不可见食甚情况下,日月食实际见刻小于半定用刻。即食甚在日出(没)前,或在日没(出)后。日出(没)时食分正减退,日没(出)时食分正进展。所以宣明历术文说,“多于半定用刻,出为进,没为退;小于半定用刻,出为退,没为进。”

宣明历交食计算方法和推步程序比较简单。为节省篇幅不计算实例了。宣明历在中国行用了 71 年,在日本施行了 823 年,其中 862—892 年中日共同行用。日至今保存大量宣明历施行期间的日月食预报和观测。其中日食五十、月食百四十余次。日本学者渡边敏夫、内田正男等对宣明历日月食计算做过细致的研究。内田认为宣明历是基于阳城( $\lambda 113^{\circ}E, \varphi 34^{\circ}.6N$ )观测制订的;渡边视作在山西阳城( $\lambda 112^{\circ}.5E, \varphi 35^{\circ}.5N$ )观测得出的。因而考查结果略有不同。此两地距日本京都约  $23^{\circ}$ ,时间相差约  $92^m$ 。对日食而言,不考虑这点当然不可能准确报出京都地区交食。考查得出,用宣明历预报 862—1684 年京都的交食,误差个别的可达  $3^h$ 。日食平均误差约早  $50^m \sim 80^m$ ,月食约早  $40^m$ 。计算阳城的日

月食误差也大约有 $1^h$ ,通常是偏后。在862至1684年这823年间的日食预报大致约有六成不准。

传世有丰富的宣明历的日月食资料,并有大量的观测记录。这些材料以及宣明历交食的推算方法和精度很值得深入研究。

## 第九节 晚唐五代宋历法一瞥

《新五代史·司天考》谓,唐建中(780—783)时术者曹士蒨始变古法,以显庆五年(660)为上元,雨水为岁首,号符天历。然世谓之小历,只行于民间。而重绩乃用以为法遂施于朝廷,赐号调元历。然行之五年辄差不可用,而复用崇玄历。

符天历除上述以雨水为岁首,不用上元积年外,还采用一万为日法,使计算方便易行。更重要的它创立了相减相乘的简单二次函数算式,来计算由中心差引起的太阳盈缩运动。将函数算法公式引入历法计算中来。这个特点为唐末边冈的崇玄历所继承并有很大发展。

唐末昭宗时,宣明历施行已久,数亦渐差,乃诏边冈等改治新历。景福元年(892)历成,赐名崇玄。二年(893)行用,至唐哀帝天祐四年唐亡,凡15年。崇玄历气朔、发敛、盈缩、朏朧、定朔弦望、九道月度、交会、入食限去交前后等皆大衍之旧。余虽不同,亦殊途而至者。其主要差别是算法上广泛采用了函数来处理各类的历法推步。他将二次函数算法推广到黄赤道宿度换算、月亮的黄道内外度和交食的有关问题。并首创三四次函数算法以计算太阳距极、每日晷长、漏刻等历法问题。崇玄历算法的发展对五代、宋历法有很大影响。

后晋天福(939—943)时曾颁行马重绩的调元历。此历在辽施行过48年(947—994)。其术失传。后周显德三年(956)至七



年(960)周亡,行用王朴钦天历。宋初自建隆元年(960)迄乾德元年(963)沿用。此术共行用8年。历术仅存基本法数和部分推步方法。日躔月离五星损益朏朒诸数,史皆缺失。中原地区,五代其他时期皆用边冈崇玄历。

北宋168年间,颁行了应天(964—982)、乾元(983—1000)、仪天(1001—1023)、崇天(1024—1064,1068—1074)、明天(1065—1067)、奉元(1075—1093)、观天(1094—1102)、占天(1103—1105)和纪元(1106—1127,北宋南迁)等九历。南宋152年中,颁行了统元(1136—1167)、乾道(1168—1176)、淳熙(1177—1190)、会元(1191—1198)、统天(1199—1207)、开禧(1208—1251)、淳祐(1252)、会天(1253—1270)、成天(1271—1276)和本天(1277—1279,南宋亡)等十历。南宋建炎二年(1128)至绍兴二年(1132)用何历术失载。绍兴三年(1133)迄五年(1135)又用纪元术。历志记载至德祐丙子(1276)复八改历,内缺淳祐。

《宋史·律历志》两度记载,宋历在东都(北宋开封)凡八改,曰应天、乾元、仪天、崇天、明天、奉元、观天、纪元,而独缺占天历。并云,统元历颁行虽久,有司不善用之,暗用纪元法推步而以统元为名。乾道二年(1166),日官以纪元历推三年丁亥岁十一月甲子朔,将颁行,裴伯寿诣礼部陈统元历法当进作乙丑朔,于是依统元历法正之。并记载有,二年(1166)礼部谓:统元历法用之十有五年,纪元历法经六十年。纪元历自崇宁五年(1106)始用,迄乾道二年(1166)历经六十年。三年(1107)侍御史单时言:“比年太史局以统元历稍差而用纪元历。”可知,南宋高宗绍兴六年(1136)颁行统元历,实行十五年,乾道三年(1167)复用一年。绍兴二十一年(1151)后迄乾道二年(1166)仍行纪元历。历志记载淳祐十一年(1251),殿中侍御史陈垓说,“今所颁历乃相师尧等依淳祐新历推算”,“开禧旧历仅差一二刻,而李德卿新历差六刻二分有奇”。

“由此观之，旧历差少未可遽废，新历差多未可轻用。一旦废旧历而用新历，不知何所凭据，请参考推算颁行。”十二年(1252)，谭玉历成，赐名会天。宝祐元年(1253)行之，史缺其法。由此可知，李德卿淳祐历于十一年颁行十二年历，仅行用了一年。会天历史缺其法，但今有宝祐四年(1256)丙辰岁会天万年具注历一册抄本传世，对其情况可有一些了解。

两宋历凡 19 改，但历法在天文学并无很大发展。而在数学方法上，由符天、崇玄历创立的函数算法，宋代历法又进一步地发扬光大。其中尤以周琮的明天历较为突出。明天历对日月五星的盈缩运动，黄赤、黄白距度的变换，交食、晷漏长度、黄道去极度等问题的计算，皆采用二次及高次函数方法来处理。这些在第二章中有详述，就不重复了。宋代历法比较有影响的是明天、纪元、统天三历。

周琮明天历不仅算法上有发展，其取法大衍历议撰写义略，说明其立法之源由，评议古历的得失，简明扼要，也很有特色。历法很多基本单位，例如年月日之间往往没有整数倍的公约关系。在没有十进制小数法之前，古代天文学家就用分数来表示天文数据的奇零部分。例如四分历的朔望月长  $29\frac{499}{940}$  日，三统历的月长

是  $29\frac{43}{81}$  日。这些分数的分母称作日法，分子叫朔余。古代天文学家是采用逐次逼近的调日法，来不断修正所得出的分子和分母的数值，才得到与观测或推算相符的以分数形式表达的历法数据奇零部分的。明天历议论调日法说，后汉刘洪考验四分，于天不合，乃减朔余苟合时用。自是已降，率意加减，以造日法。宋世何承天更以  $\frac{26}{49}$  为强率， $\frac{9}{17}$  为弱率，于强弱之际以求日法。承天日法 752，得 15 强 1 弱。自后治历者，莫不因承天法，累强弱之数，皆

不悟日月有自然合会之数。今稍悟其失,定新历以 39000 为日法,6240000 为度母,9500 为斗分,693 为朔余。指出了调日法之创建及其取强弱率、调整日法朔余的方法,以及周琮的发展和改易。又在月度转分中说,旧历课转分,以  $\frac{5}{9}$  为强率,  $\frac{56}{101}$  为弱率,乃于强弱之际而求秒焉。新历转分 29882242251,以 1000000 平之,得  $27 \frac{554626}{1000000}$  日,最得中平之数。介绍了旧历用调日法决定近点月奇零部分的方法及明天历的不同。对了解调日法及古历奇零的选取很有用处。周琮明天历议涉及中朔、盈虚、岁差、周天、宿度,日月五星行度、盈缩、晷漏、消息、进朔、食差等历法的方方面面,介绍了各项历法数值及各术推步的发展。

周琮论历曰:“古今之历,必有术过于前人,而可以为万世之法者,乃为胜也。”他列举的创法诸家及推较晷影、星度、交食之法,皆为后世所宗,要点如下:①一行为大衍历议及略例,校正历世,以求历法强弱,为历家体要,得中平之数;②刘焯悟日行有盈缩之差;③李淳风悟定期之法,合并气朔闰余皆同一术;④张子信悟月道有交道表里,五星有入气加减;⑤晋姜岌始悟以月食所冲之宿为日所在之度;⑥后汉刘洪作乾象历,始悟月行有迟疾数;⑦刘宋祖冲之始悟岁差;⑧唐徐昂作宣明历,悟日食有气刻差数;⑨明天历悟日月会合为朔,所立日法、积年有自然之数,及立法推求晷影,知气节加时所在;⑩较日月交食,若一分、二刻以下为亲,二分、四刻以下为近,三分、五刻以上为远,以历注有食而天验无食,或天验有食而历注无食者为失;⑪较星度,则以差天二度以下为亲,三度以下为近,四度以上为远;⑫较晷影尺寸,以二分以下为亲,三分以下为近,四分以上为远。

周琮认为,“其疏谬之甚者,即苗守信之乾元历、马重绩之调元历、郭绍之五纪历也。大概无出于此矣。”周琮论九家创法之

端,为授时所本。可惜明天历议虽详,而测算未能精到,行之仅3年,因月食不验,而复用崇天历。

纪元历是两宋行用最长的二历之一。自徽宗崇宁五年(1106)颁行,到靖康二年(1127),北宋施行22年。南渡后,因战乱其术散失。至绍兴二年(1132)高宗重新购得。三年(1133)仍用此术,迄五年(1135)。六年(1136)至二十年(1150)用统元历15年。绍兴二十一年(1151)后复用纪元历,迄乾道二年(1166)凡16年。乾道四年(1168)又用一年。共施行42年。另外,行用统元历时,曾参用纪元历。有的学者将这15年,及南渡后建炎二年(1128)至绍兴二年(1132)5年,加到一起,称纪元术共用62年。因史载缺失,南渡后至绍兴二年所用历术不明。另宋史历志记载统元历用15年。绍兴二十一年(1151)所行是统元,还是纪元,学者时有不同纪法,故有称纪元共行41年、42年或62年等几种说法。但目前所传历日,因统元术无传,这62年皆以纪元术推得。在两宋历法中纪元和崇天二术是行用最久的两种历法,崇天历自仁宗天圣二年(1024)颁行,用8年。重修后自仁宗明道元年(1032)至英宗治平元年(1064)用33年,神宗熙宁元年复用7年,共施行48年。

纪元历有较高的精度,它的基本常数,例如岁差,计算方法优于前历。姚舜辅求岳台晷影,重测二十八宿赤道宿度。计算、推步和观测方法都做了改进。

在明末以前,中国古代天文学不明球面三角术。由太阳赤道距度 $\alpha$ ,推求黄道距度 $\lambda$ ,只能用实物模拟或经验公式来解决。自符天历、崇玄历创立相减相乘法,北宋以后各历差不多都应用函数算式处理各类历法计算问题。纪元历将黄赤道距度换算公式做了进一步简化。对太阳去极度、月去黄道度等算式,都有所改进。

为制定新历,在崇宁元年至五年(1102—1106),姚舜辅领导又

重新测定了二十八宿赤道距度。在北宋所进行的七次恒星测量中，这是最精确的一次。过去的观测都以度为单位，姚舜辅以  $1/4$  度为单位，观测读数准确。他使用的仪器经过改进，观测方法有所提高。因此观测得到了前所未有的精度。二十八宿距度平均误差仅  $0^{\circ}.15$ 。精度的提高基于观测。纪元历得出的周天度比旧历加大。因而改善了岁差常数。纪元历岁差约 73.5 年差 1 度，而观天、明天、统元各历皆 78 年左右始差 1 度，不如纪元之密。

因为太阳甚亮，人眼不敢直视，且日出列宿俱熄。所以古人欲测日躔所在，是根据昏旦、夜半中天之星来推出的。可是昏、旦、夜半时刻不易准确测得。时刻一差则太阳所距、所在位置就不能准确无误。晋姜岌首倡根据月食所冲，判断日度所在。因月食在望，正当日月相冲。月食时尤其全食时可以准确判定星宿位置。由于水金二星附日而行，水星近地不易观测和测准，纪元历创立以金星远近于昏后明前验定星度，确定太阳位置的方法也比较简便易行，因为金星动态在战国末期、秦汉之际已测得比较准确，由此确定日躔易得其真。

纪元历推日月交会和五星也比较准确。历史记载，五星中最难以观测的火星，纪元历推步都能比较密近。

清代学者梅文鼎说，“宋历莫善于纪元，尤莫善于统天。”又说，“授时历集古法之大成，自改正七事、创法五端外，大率多因古术。”“不读统天历，不知授时之岁实消长。”统天确为宋历中最优秀的历法。宁宗庆元五年(1199)赐名颁行。七月辛卯朔，统天历推日食，云阴未见。六年(1200)六月乙酉朔，推日食不验。嘉泰二年(1202)五月甲辰朔日有食之，诏太史与草泽聚验于朝。太阳午初一刻起亏，未初刻复满。统天历先天一辰有半。乃罢杨忠辅，诏草泽通晓历法的应聘修治。开禧三年(1207)新历议论始定，诏以戊辰年(嘉定元年，1208)权附统天历颁之。这样，这部优

秀历法实际仅施行了9年。

统天历术载《宋史·历志》。记有基本法数和日躔、黄道、赤道过宫、月离、五星动态、盈缩诸表。但术文极其简单。仅因岁实、朔实消长，记有求天正冬至、求天正经朔的方法。此外，只在赤道过宫后注有依今历上元命日所起，及求黄道过宫的简单术文。所有步发敛、日躔、月离、晷漏、交会、五星各术，皆注“法同前历，此不载”，《宋史·历志》中均予省略。

统天历最大的改革为变动了上元的求法而采用近距历元及发现岁实消长，回归年长度古大今小不是常量。这两点都为其后的授时历采纳。

统天历所找的上元甲子，不是天正甲子冬至合朔夜半齐同，也不是日月交会、五星会合、月过高卑的日月合璧、五星连珠的时刻。统天历的上元甲子只不过是一般的甲子年而已。由于历法计算起点，天象并不齐同，所以创设了气差、闰差、转差、交差等以便于推算。与授时历的闰、气、周、转、交、合、历七应含义虽略有不同，其实质是一样的。

我们考查后得出，统天历是以上元甲子年的冬至日作为计算起点的。气差是冬至与其后甲子日夜半的时距。闰差为其后经朔距甲子夜半的时刻。气、闰、转、交等差为统天历所创。步月离、交会术文中推步皆云“与前历同此不载”，无法判别转差、交差。我们推算了统天历的天象，它们可能是近地点、黄白交点距甲子夜半的时距。

杨忠辅统天历发现岁实消长，古大今小，不是常量。上推下验，须用斗分差来校正。斗分差127，每年岁分相差为斗分差除以10000，即0.0127。往古上推，加之；下验未来，减之。

统天历视岁分消长如一等差级数。首项 $\alpha$ 即岁分4382910，公差 $d=0.0127$ ，上推为正下求为负。以绍熙五年甲寅(1194)为起点。其

后 100 年的岁分为  $a+100d=4382910-100\times 0.0127=4382908.73$ , 岁实 365.2423942 日。其后 200 年公元 1394 年的岁分为  $a+200d=4382910-200\times 0.0127=4382907.46$ , 回归年长 365.2422883 日。故统天历的岁实消长或回归年长度可用下式表述:

$$\begin{aligned} & \text{岁实(回归年日数)} \\ &= 365^{\text{d}}.2425 - 0^{\text{d}}.000001058 \times (t-1194) \\ &= 365^{\text{d}}.2425 - 1^{\text{d}}.0583 \times 10^{-6} (t-1194) \end{aligned}$$

100 年的总长度、总日数为:

$$\begin{aligned} S &= \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \\ &= 100 \times 4382910 - 50 \times 99 \times 0.0127 \\ &= 438291000 - 62.865 \\ &= 438290937.1 \\ &= 36524.24476 \text{ 日} \end{aligned}$$

向后 200 年的总长度、总日数为  $200 \times 4382910 - 100 \times 199 \times 0.0127 = 876581747.3 = 73048.47894$  日。

统天历的岁实为岁分/策法,得 365.2425 日。与 1582 年 10 月颁行的格里历相当。统天历的朔策为朔实 354368/策法 12000,得 29.53066667 日,为隋唐以降诸历最强率。是因统天历朔实如岁实亦有消长之法。其法为以 105 乘距算( $t-1194$ ),退位减之。与岁实消长相同,亦为“积算少如距算者加之”,即上推为加,下求为减。有的学者认为朔实 354368,每岁须减 105/10 分,每月需减  $10.5/\frac{\text{岁分}}{\text{朔实}} = 0.8489483$  分。即

$$\begin{aligned} \text{朔望月长度} &= 354368 - 10.5 \times (t-1194) \\ &= 29^{\text{d}}.53066677 - 0^{\text{d}}.000875(t-1194) \end{aligned}$$

如果如此,则十年后的朔望月就仅为 29.52191667 日。显然不当。我们认为,统天历朔实与岁实消长有对应关系。距差( $t-$

1194)为  $n$  年后的朔实是:

$$\text{距差 } n \text{ 年的朔实} = \frac{n \text{ 年总岁分} - 10.5(t - 1194)}{n(\text{岁分 } 4382910 / \text{朔实 } 354368)}$$

这样,距绍熙五年甲寅(1194)百年后,1294 年朔实 =  $(438290937.1 - 1050) / 1236.824431 = 354367.1002 = 29.53059168$  日。距绍熙甲寅二百年后,1394 年朔实为:

$$\begin{aligned} 1394 \text{ 年朔实} &= \frac{876581747.3 - 2100}{200 \times 12.36824431} \\ &= 354367.0489 = 29.53058741 \text{ 日} \end{aligned}$$

现代得出的岁实、朔实消长的关系如下:

$$\text{回归年} = 365^{\text{d}}.24218968 - 0^{\text{d}}.00000000616(t - 2000)$$

$$\text{朔望月} = 29^{\text{d}}.53058885 + 0^{\text{d}}.0000000022(t - 2000)$$

统天历岁分、朔实消长都嫌过大,更重要的是朔望月的消长方向与统天历是相反的,即应该是古小今大。

统天历求天正冬至方法为:

$$\text{积算} = \text{距算}(3830) + (\text{所求年} - \text{绍熙甲寅 } 1194)$$

$$\text{距差}(t - 1194) = \text{积算} - \text{距算}$$

$$\text{气泛积} = \text{积算} \times \text{岁分} - \text{气差 } 237811$$

$$\text{躔差} = \text{距差} \times \text{斗分差} / 10000$$

$$\text{气定积} = \text{气泛积} - \text{距差} \times \text{躔差}$$

$$\text{冬至日分} = [\text{气定积} / \text{纪实 } 720000]_R$$

$$\text{冬至大小余} = [\text{冬至日分} / \text{策法 } 12000]_R$$

求天正经朔的方法如下:

$$\text{天正闰泛余} = [(\text{冬至气定积} - \text{闰差}) / \text{朔实}]_R$$

$$\text{天正经朔泛积} = \text{气定积} - \text{天正闰泛余}$$

$$\text{天正朔定积} = \text{朔泛积} - \frac{105}{10} \times \text{距差}$$

$$\text{经朔日分} = [\text{天正朔定积} / \text{纪实}]_R$$



$$\text{天正经朔大小余} = [\text{天正经朔日分} / \text{策法}]_R$$

其中

岁分 4382910; 策法 12000; 朔实 354368;

气差 237811; 闰差 21704; 斗分差 127;

纪实 720000; 气策  $15 \frac{2621.25}{12000} = 15.2184$  日;

望策  $14 \frac{9184}{12000}$  日; 弦策  $7 \frac{4592}{12000}$  日;

岁余 62910。

得出天正冬至大小余, 累加气策, 得以后各气。由天正经朔, 递加朔策、望策、弦策, 可得各月经朔、弦、望。

下面以庆元五年、六年为例, 各求其天正冬至和经朔(表 9-7)。因距差乘躔差不满秒半以上者, 以泛为定。即小于 0.00005 日者略去, 就以气泛积为气定积。另外, 统天历因庆元五年始颁行, 实际计算中, 以此为起点, 即距差  $= t - 1199$ 。

表 9-7 求庆元五年、六年天正冬至和经朔

	庆元五年(1199)	庆元六年(1200)
积算	3835	3836
气泛积	16808222039	16812604949
$\frac{\text{气定积}}{\text{纪实}}$	$23344 \frac{542037.6}{720000}$	$23350 \frac{604951.2}{720000}$
冬至大小余	45.1698 己酉	50.4126 甲寅
天正闰泛余	$47431 \frac{171730.28}{720000}$	$47443 \frac{302226.29}{720000}$
天正朔泛积	16808050309	16812302723
朔定积/纪实	$23344 \frac{370310}{720000}$	$23350 \frac{302717}{720000}$
天正朔大小余	30.8592 甲午	25.2264 己丑

## 第十章 元明授时集大成

### 第一节 授时历制定、颁行与成就、特点

#### 一、授时历的制定和颁行

元初承用金大明历。庚辰岁(1220)太祖西征,夏五月,西域人预言五月望夜当有月食,至期不效;而二月、五月朔日见微月于西南。中书令耶律楚材以大明历稍后天,乃采用大明历的基本天文数据(周天度分微异)和推步方法,而调正了历术推步的起点。以中元庚午岁(1210),国兵南伐而天下略定,推上元庚午岁天正十一月壬戌朔子正冬至,日月合璧五星联珠,同会虚宿6度,以应太祖受命之符,作为历元。又以西域、中原相距殊远,遂创里差之法予以增减,这样虽东西万里通过经度差的改正,所得地方时不复差忒,并题名西征庚午元历,表上之,但未得颁行。此外,耶律楚材认为西域人的步五星术密于中国,曾作麻答巴历。可惜此历现已失传。庚午元历今还保存在《元史·历志》中。

《元史》说,世祖忽必烈至元四年(1267),西域札马鲁丁撰进“万年历”,世祖稍颁行之。世祖本纪载,至元八年(1271)设回回司天台,以札马鲁丁为提点。故所进万年历可能就是回回历。“稍颁行之”,是指仅行用了很短时间,还是只作为其时制历的参考,因“万年历”失传,已不易详考。但《元史》刘秉忠、许衡、王恂、郭守敬诸传中,都说元朝初年所用金大明历年代已久,错误很多,

应该改行新历。这些材料似皆说明授时历前并未施行过“万年历”、“回回历”等历法。

至元十三年(1276),平宋。忽必烈遂诏太子赞善王恂、都水少监郭守敬改制新历,设立太史局,并命御史中丞张文谦、枢密副使张易总领其事。王恂又举荐退休还乡的前中书左丞许衡参加。许衡等认为金虽改历,但止以宋纪元历略加增益,实未曾验天测候。乃与南北日官陈鼎臣、邓元麟、毛鹏翼、刘巨渊、王素、岳铉、高敏等分析考查历代历法,并建造仪器,分赴全国各地测候日月星辰的运行和日景,参别同异,酌取中数,以为历本。十六年改局为太史院,以王恂为太史令,郭守敬为同知太史院事。张文谦为昭文馆大学士,领太史院以总其事。同年太史院又得深明历理的大德杨恭懿共襄此事。十七年(1280)冬至历成,新历赐名“授时历”。十八年(1281),颁行天下。

就在至元十八年,许衡、王恂先后病故,杨恭懿辞归。授时历制成,但推步方法、测验数据尚未整理定稿。王恂精于算术,郭守敬巧思过人。原本授时历制定中,历法理论和推步演算多为王恂负责,而仪器研制和观天测候悉归郭守敬安排。但到此时,整理授时历的全部担子就落到了郭守敬身上。在以后的几年中,他整理完成了《推步》七卷、《立成》二卷、《历议拟稿》三卷等书稿。二十年(1283),太子谕德李谦奉命撰写《历议》十篇,发明新历顺天求合之微,考证前代人为附会之失。认为此历可以行用永久。自古及斯,其推验之精,确未有出于此者。

授时历不论在实际测量,或理论推算都有辉煌成就。它是王恂、郭守敬和其他天文学家,在张文谦、张易、许衡领导下的集体创作。郭守敬由于享寿最高,有关授时历的文稿又多由他整理完成,故后来研究授时历的人总要提到他的名字。实际上郭守敬也确有很大贡献。

现在,许衡、王恂、郭守敬所撰的《授时历》及王谦《历议》都保存在《元史·历志》中,是研究授时历的最主要最基本的材料。

授时历自至元十八年颁行,到元惠宗至正二十八年(1368)共施行 88 年。朱元璋吴元年(1364)十一月乙未冬至,太史院使刘基率其属高翼上戊申(1368,即后来的明洪武元年)大统历。其法数推步悉依授时历。洪武元年改院为司天监,又置回回司天监。诏征元太史院使张佑、回回司天监黑的儿等 14 人,寻召回回司天台官郑阿里等 11 人至京议历法。三年改监为钦天,设天文、漏刻、大统历、回回历四科。以监令、少监统之。岁造大统民历、御览月令历、七政躔度历、六壬遁甲历、四季天象占验历、御览天象录,各以时上。其日月交食分秒时刻,起复方位,先期以闻。

洪武十七年(1384)闰十月,漏刻博士元统言,历以大统为名,而积分犹踵授时之数,非所以重始敬正也。况授时以至元辛巳(1281)为元,至洪武甲子(1384)积 104 年,年远数盈,渐差天度,合修改。七政运行不齐其理深奥。闻有郭伯玉者,精明九数之理,宜征令推算,以成一代之制。报可。于是提升元统为监令。统乃取授时历,去其岁实消长之说,于交食晷漏做了微小改动,重新编排,成书四卷,以洪武十七年甲子(1384)为元,命曰《大统历法通轨》。二十二年改监令、丞为监正、副。二十六年监副李德芳上言奏请恢复授时历至正辛巳为元及“周岁消长,百年各一”的岁实消长之法。元统奏辩。太祖说,二说皆难凭,但验七政交会行度无差者为是。此事不了了之。自此大统历元以洪武甲子,而推算仍依授时法。直到崇祯十七年(1644),又行用了 276 年。明亡后,南明小朝廷仍颁行大统历。《小腆纪年》载,到 1659 年(顺治十六年)冬十月戊子朔桂王朱由榔仍奉明正朔,颁行次年历书,直到 1662 年桂王为缅甸献于清廷,为吴三桂所杀为止。这样授时历共行用 382 年。是中国古历中行用最久的历法。

授时历还东传日本、朝鲜。元朝时期高丽王朝行用的就是授时历。其后李氏王朝修成的《高丽史》中,其五十一卷历志就载有授时历经全文。日本在德川幕府时代,宽文十二年出版了《改正授时历经》。次年,小川正意作《新勘授时历经及立成》。是时日本就改革宣明历,是否采用授时历有过争论。最终于贞享二年起行用的贞享历,仍汲取了授时历的原理和方法。

## 二、授时历的成就与特点

梅文鼎说:授时历不用积年,一凭实测,故自元迄明,承用三四百年法无大差。以视汉、晋、唐、宋之屡差屡改,不啻霄壤。故曰授时集诸家之大成。盖自西历以前,未有精于授时历者也。

阮元《畴人传》也说:推步之要,测与算二者而已。简仪、仰仪、景符、窥几之制,前此言测候者未之及也。垛叠招差、勾股弧矢之法,前此言算造者弗能用也。先之以精测,继之以密算,上考下求若应准绳,施行于世,垂四百年。可谓集古法之大成,为将来之典要者矣。自三统以来,为术者七十余家莫之伦比也。

确如斯言。授时历是集古历之大成,反映中国历法最高水平的压卷之作。

授时历用以前天文学家没有用过的数学方法,改进了历法。使用招差法三次差内插公式及弧矢割圆术,创立了更准确的推算日月五星运行、黄赤道差、黄赤道内外度和白赤、黄赤交点距限的新推算方法。授时历彻底废除了虚拟的上元积年。根据多年实测,得出以至元十八年(1281)辛巳年前冬至作为计算历元的各项天文根数:气应(冬至距其前甲子夜半的时间)、闰应(冬至距十一月平合朔的时距)、转应(冬至距月过近地点的时日)和交应(冬至距月过黄白降交点的时间)以及周应、合应、历应等数据。

中国古代各历多用分数来表示天文数据的奇零部分。授时

历采纳南宫说撰神龙乙巳元历创立 100 为母法、曹士蒨符天历以一日为万分的先进经验。以日百刻、刻百分、分百秒，弧度也为度百分、分百秒的百进制。秒以下的微纤也一律从百进，大大减轻了天文计算的工作量。

授时历在研制过程中，曾遍考汉以来历书 40 余家，精思推算，考查探究其演变与得失，从中汲取有益的理论和方法。总结比较，授时历选取了其时比较先进的天文常数。它以 365.2425 日为回归年，以 365.2575 度为周天。从而得出岁差 1 分 50 秒，或 66 年 8 月退 1 度。这是取自杨忠辅的统天历。授时历朔策 29.530593 日，交终 27.212224 日，转终 27.5546 日。而赵知微重修大明历和耶律楚材西征庚午元历的朔望月、近点月、交点月与此相同。可知授时历关于月道运行的主要数据是依赵知微、耶律楚材历法得出的。

杨忠辅最先发现回归年长古大今小不是常量。上推古代下测未来，首倡用“斗分差”校正的办法。斗分差 127，相当于百年回归年长减少 0.0001058 日。授时历接受这个概念，也有“岁实消长”之说，规定“周岁消长，百年各一”，“上考百年长一分，下推百年消一分”。即规定每隔 100 年，岁实应该减少 0.0001 日。用代数式表达如下：

$$\text{统天历回归年长} = 365^{\text{d}}.2425 - 0.000001058(t - 1199)$$

$$\text{授时历回归年长} = 365^{\text{d}}.2425 - 0.000001(t - 1281)$$

根据现代观测，是时合天的回归年长应为：

$$\text{回归年长} = 365^{\text{d}}.242242 - 0.00000006(t - 1199)$$

其中  $t$  为公元年数。由上式看出，虽然授时历比统天历稍有改进，但实际上它们的“斗分差”和岁实消长率都过大了。

授时历虽然有辉煌成就，但由于受到时代限制，有好多天文规律未能很好认识和掌握。例如，岁实 365.2425 日数值稍大，明

元统又将其作为常数,废弃了岁实消长之说。行用日久,必然出现差错。在明代的中后期多次出现日月食与推算不应、舛误。授时历关于五星运动的数据大致与耶律楚材庚午元历相当。用以推算五星的运动、位置远不如回回天文学精密。所以梅文鼎说,五星之迟疾逆留,汉以前无言之者,汉以后语焉而不详。虽授时历号为精密,而于此未有精测。至西历乃能言之。

弧矢割圆术及其推导应用,在元初仍是一种进步的数学方法,它创立了我国自己的球面三角学理论和计算公式。但因所取的三角函数值和反三角函数值都很粗疏。为简化计算,授时历取圆周率为3,这也增加了计算中的误差。因而用公式算出的黄赤道差,误差虽比大衍历要小,但却比姚舜辅纪元历用经验公式算出的还大。

由于受行星的摄动影响,地球轨道的长轴又称拱线发生旋转,使得近日点、远日点循着轨道运行。即长轴并不保持固定的方向。拱线旋转的周期约为20000年。约公元前4000年地球在9月23日即秋分日过近日点,在公元1250年冬至日过近日点。现在地球约在1月4日过近日点。授时历假定冬至日太阳运动最速,夏至日运行最缓。授时历颁行时近地点和冬至点相距不到1度,所差甚小。到明朝末年,太阳最速点已延迟到冬至后6日之多,依大统历推算太阳位置就有了较大误差。

授时历是中国古历最优秀的代表。由于时代和认识上的限制,行用日久出现一些舛误是正常的、难免的。

梅文鼎在《古今历法通考》“序言”中说:“授时历集古法之大成。自改正七事,创法五端外,大率多因古术。故不读耶律文正之庚午元历,不知授时之五星;不读统天历,不知授时之岁实消长;不考王朴之钦天历,不知斜升正降之理;不考宣明历,不知气刻时三差;非一行之大衍历,无以知岁自为岁,天自为天;非淳风

之麟德历,不能用定朔……”事实证明,授时历既有新的科学上的创造发展,也总结汲取了历代有价值的经验;既有创造性的理论推演,又有大规模严谨的观测实践。他们的工作和成就,是天文历法史上的大事,值得学习和称道。

## 第二节 日行盈缩、月行迟疾

### 一、日行盈缩的计算

地球绕日公转的轨道是椭圆。因此运动不是匀速的。过近日点时速度最大,过远日点时最慢。太阳视运动最大时日行 $1^{\circ}.02$ ,最小时约为 $0^{\circ}.953$ 。

北齐张子信首先发现太阳运动有疾徐,不是匀速的。隋末刘焯及其以后的天文学家都认为日月五星的运行在一定时期内是等加速的或等减速的。自隋大业历、皇极历开始,各历都给出太阳不均匀运动的改正表,即日躔表。根据二次差内插公式就可得出太阳盈缩运动的近似结果。太阳运行大于平均速度叫盈,不及平速曰缩。王恂、郭守敬的授时历认为把日月五星运动视作等加速、等减速比较粗疏,它们的运动速度不是时间的一次函数,而是时间的二次函数。在某一时间内运行的度数不是时间的二次函数,而是时间的三次函数。基于这个认识,因此授时历计算结果比过去要精密得多。

授时历认为太阳在冬至点速度最高,在夏至点速度最低。并根据实测得出,在冬至前、后,太阳只用88.91日就在天球上走一象限91.31度。按平均日行1度来说,在88.91日中它多走或超前了2.40度。就是说,按匀速运动,它需用91.31日。因冬至点日行最速,从秋分(定秋分)到冬至,或从冬至到定春分太阳运行



比匀速运动少用了 2.40 日。夏至点太阳运行最慢,在夏至点前或后,需要 93.71 日太阳运行一象限。这比匀速多用了 2.40 日。按日期来说,它比匀速运动少走了 2.40 度。

授时历称冬至后的半岁 182.62125 日为盈历,夏至后的半岁为缩历。并给出盈初缩末限 88.909225 日,编初盈末限 93.712025 日。称冬至后 88.909225 日以内为盈初限,冬至前 88.909225 日以内为缩末限;夏至后 93.712025 日以内为缩初限,夏至前 93.712025 日以内为盈末限。为此,授时历建立了两个不同的计算盈缩差的三次差内插公式。

### (一)冬至前后盈初缩末历盈缩差算式

授时历将冬至后 88.91 日等分为 6 段,每段约长 14.82 日。从冬至时刻开始。通过实测得出的太阳实行度与平行度相较,得出每段的积差。所以各段积差为段末时刻的太阳实行度与平行度(每日 1 度)之差。将各段积差,以其段积日除之,得各段日平差,为该段时间内平均每日多走的分数。亦即该段中间之日超出平均运动的分数,又称盈加分。各段日平差与后段日平差相减,为一差;各段一差与后段一差相减,为二差。得数全以分数表示(10000 分为 1 度),结果如表 10-1。

表 10-1 冬至后各段积差、日平差、一差、二差值

	积日	积差	日平差	一差	二差
冬至时	0		[513.32]	[37.07]	[1.38]
第 1 段	14.82	7058.0250	476.25	38.45	1.38
第 2 段	29.64	12976.3920	437.80	39.83	1.38
第 3 段	44.46	17693.7462	397.97	41.21	1.38
第 4 段	59.28	21148.7328	356.76	42.59	1.38
第 5 段	74.10	23279.9970	314.17	43.97	
第 6 段	88.92	24026.1840	270.20		

根据上述定义,冬至时刻的一差应该是  $38.45 - 1.38 = 37.07$ ,日平差应为  $476.25 + 37.07 = 513.32$  分。

由上列数据,可以得出平立定三差。

以第1段日平差 476.25 分为泛平积。以第2段二差 1.38 减去第1段一差 38.45,余 37.07 为泛平积差。另称第1段二差 1.38 折半得 0.69 为泛立积差,则:

$$\text{定差} = \text{泛平积差} + \text{泛平积} = 37.07 + 476.25 = 513.32$$

$$\text{平差} = \frac{\text{泛平积差} - \text{泛立积差}}{\text{段日}} = \frac{37.07 - 0.69}{14.82} = 2.46$$

$$\text{立差} = \text{泛立积差} / \text{段日}^2 = 0.69 / 14.82^2 = 0.0031$$

计算中段日需取  $14.8182(88.909225/6)$  日。

授时历称二至后第  $x$  日太阳实行度与平行度之差  $f(x)$  为盈缩差。对于冬至前后的盈初缩末限盈缩差的算式是:

$$\begin{aligned}\text{盈缩差 } f(x) &= x \times [\text{定差} - x \times (\text{平差} + x \times \text{立差})] \\ &= x \times [5133200 - x \times (24600 + 31 \times x)] \\ &\quad \times 10^{-8} \text{度}\end{aligned}$$

其中  $x$  为距冬至之日数。

这个三次差内插公式的推导过程最关键的一步是通过令  $g(x) = f(x)/x$ , 将三次差内插转化为二次差内插得出的。 $f(x)/x$  即为冬至后第  $x$  日的日平差。欲求冬至后第  $x$  日的日平差, 先将  $x$  日数化为段数,  $x$  日为冬至后  $x/14.82$  段。根据二次差展开公式, 代入上表中有关数值, 得:

$$\begin{aligned}f(x)/x &= 513.32 - \frac{x}{14.82} \times (37.07) - \frac{1}{2} \times \\ &\quad \frac{x}{14.82} \times \left( \frac{x}{14.82} - 1 \right) \times 1.38 \\ &= 513.32 - \frac{(37.07 - 0.69)x}{14.82} - \frac{0.69x^2}{14.82^2} \\ &= 513.32 - 2.46x - 0.0031x^2\end{aligned}$$

所以

$$f(x) = 513.32x - 2.46x^2 - 0.0031x^3 \times 10^{-4} \text{度}$$

利用这个式子计算某日的盈缩积差  $f(x)$  要做平方、立方、乘、减多次运算。为此，授时历专门计算编制了数表，称作“布立成”。表中列出了每日的盈缩积差，又叫盈积度。若  $x$  不是整数，设  $x = m + t$ ,  $m$  为不大于 89 的整数,  $0 < t < 1$ , 则  $f(x) = f(m) + t\Delta m$ ,  $f(m)$  为表内第  $m$  日的盈缩积差,  $\Delta m$  为表中第  $m$  日的盈加分。

对于冬至前后盈初缩末历布立成方法如下：

$$\text{加分立差} = 6 \times \text{立差} = 6 \times 0.0031 = 0.0186$$

$$\text{平立合差} = 2 \times \text{平差} + \text{加分立差}$$

$$= 2 \times 2.46 + 0.0186$$

$$= 4.9386$$

$$\text{盈加分} = \text{定差} - \text{平差} - \text{立差}$$

$$= 513.32 - 2.46 - 0.0031$$

$$= 510.8569$$

这样得到的是初日之数。要推次日及以后逐日，皆以加分立差，累加平立合差，即得逐日平立合差。以平立合差减其日加分，为次日加分。其加分累计之和即得各日盈缩积。做法见表 10-2。

表 10-2 盈初缩末历布立成法

积日	盈缩积	盈加分	平立合差	加分立差
初日	0	510.8569	4.9386	0.0186
第 1 日	510.8569	505.9183	4.9572	0.0186
第 2 日	1016.7752	500.9611	4.9758	0.0186
...	...	...	...	...
第 88 日	24009.3568	5.0593	6.5754	0.0186
第 89 日	24014.4161			

这个表还是利用招差法来制定的。因为盈缩积分是  $x$  的三次函数,累次求差时,在一差 $[\Delta'_n = f(n+1) - f(n)]$ 、二差 $(\Delta''_n = \Delta'_{n+1} - \Delta'_n)$ 之后还有三差 $(\Delta'''_n = \Delta''_{n+1} - \Delta''_n)$ 。授时历分别名为盈加分、平立合差和加分立差。现在用  $\alpha, \beta, \gamma$  表示冬至时的盈加分、平立合差和加分立差。

令  $a = 513.32, b = 2.46, c = 0.0031$ , 则

$$\begin{aligned} f(x) &= 513.32x - 2.46x^2 - 0.0031x^3 \\ &= ax - bx^2 - cx^3 \\ &= xa + \frac{x(x-1)}{1 \times 2}\beta + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \times 2 \times 3}\gamma \\ &= (a - \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{3})x + (\frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2})x^2 + \frac{\gamma}{6}x^3 \end{aligned}$$

由此即可得出:

$$r = -6c = -0.0186$$

$$\beta = -2b - 6c = -4.9386$$

$$\alpha = a - b - c = 510.8569$$

冬至前后 88.91 日(盈初缩末限)内按日的盈缩差就可以  $\alpha, \beta, \gamma$  三个差据上述方法依次加减造表。

## (二)夏至前后缩初盈末历盈缩差算式

授时历自夏至点起将其前后各 93.71 日同样分成 6 段。每段各得 15.62 日。通过实测的日躔实行度与平行度相较,得出每段的积差。其推日平差、一差、二差的方法与盈初缩末历(冬至前后)同。得数如表 10-3。根据日平差、一差、二差的定义,夏至时一差应是  $36.47 - 1.33 = 35.14$ 。日平差应是  $451.92 + 35.14 = 487.06$ 。表中补上了初日值。

表 10-3 夏至后各段积差、日平差、一差、二差值

	积日	积差	日平差	一差	二差
夏至时	0	0	487.06	35.14	1.33
第 1 段	15.62	7058.9904	451.92	36.47	1.33
第 2 段	31.24	12978.6580	415.45	37.80	1.33
第 3 段	46.86	17696.6790	377.65	39.13	1.33
第 4 段	62.48	21150.7296	338.52	40.46	1.33
第 5 段	78.10	23278.4860	298.06	41.79	
第 6 段	93.72	24017.6244	256.27		

泛平积=第 1 段日平差=451.92 分

泛平积差=第 1 段一差-第 1 段二差

$$=36.47-1.33=35.14 \text{ 分}$$

泛立积差=第 1 段二差之半=0.6650 分

由此可得出:

定差=泛平积差 35.14+泛平积 451.92=487.06 分

$$\text{平差} = \frac{\text{泛平差} - \text{泛立积差}}{\text{段日}} = \frac{35.14 - 0.665}{15.6187} = 2.21 \text{ 分}$$

立差=泛立积差  $0.665 / (15.6187)^2 = 0.0027$  分

授时历缩初盈末历(夏至前、后)盈缩差算式为:

盈缩差  $f(x)$

$$=x \times [\text{定差} - x \times (\text{平差} + x \times \text{立差})]$$

$$=x \times [4870600 - x \times (22100 + x \times 27)] \times 10^{-8} \text{ 度}$$

$$=487.06x - 2.21x^2 - 0.0027x^3 \times 10^{-4} \text{ 度}$$

其中  $x$  为距夏至的日数。

布立成时,先要求出夏至初日的一差、二差和三差。

$$\text{加分立差(三差)} = 6 \times \text{立差} 0.0027 = 0.0162 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned}\text{平立合差(二差)} &= 2 \times \text{平差 } 2.21 + \text{加分立差 } 0.0162 \\ &= 4.4362 \text{ 分}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{加分(一差)} &= \text{定差 } 487.06 - \text{平差 } 2.21 - \text{立差 } 0.0027 \\ &= 484.8473 \text{ 分}\end{aligned}$$

与盈初缩末历(冬至前、后)相同。以上所推皆为夏至初日之数。要推次日及以后逐日,皆以加分立差 0.0162 累加平立合差,为逐日平立合差。以平立合差减其日加分,为次日加分。而加分累积之和,即为逐日盈缩积。这样得出的太阳缩初盈末历(夏至前后)盈缩差立成如表 10-4。

表 10-4 缩初盈末历盈缩差立成

积日	盈缩积	加分	平立合差	加分立差
初日	0	484.8473	4.4362	0.0162
第 1 日	484.8473	480.4111	4.4524	0.0162
第 2 日	965.2584	475.9587	4.4686	0.0162
第 3 日	1441.2171	471.4901	4.4848	0.0162
...	...	...	...	...
第 93 日	24010.5261	2.9771	5.9428	0.0162
第 94 日	24013.5032			

所以,夏至日前、后的  $x$  日的盈缩积分数也可表示为:

$$\begin{aligned}\text{盈缩积 } f(x) &= 484.8473x - 4.4362 \frac{x(x-1)}{1 \times 2} \\ &\quad - 0.0162 \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \times 2 \times 3}\end{aligned}$$

以上我们分别给出了授时历计算盈初缩末限(冬至前后)和缩初盈末限(夏至前后)太阳盈缩差  $f(x)$  的算式及布立成方法。授时历计算月行迟疾和五星盈缩都采用同样的计算和布立成法。为以后叙述简单,这里将方法概括一下。

首先,根据由实测得到的实行度与平行度之较,做出积差表,

计算出定差  $a$ 、平差  $b$  和立差  $c$ 。

积差表由 6 栏数值组成：段次  $i$ ，积日  $in$ ，积差  $f(in)$ ，平差  $g(in)$ ，一差  $\Delta g_i$ ，二差  $\Delta^2 g_i$ 。

段次、积日由授时历给出（月行为积限），积差由观测得出；平差 = 其段积差 / 其段积日（积限），五星平差 = 其段积差 / 段积日；一差  $\Delta g_i$  由相邻平差相较得出，如  $\Delta g_1 = g(1n) - g(2n)$ ， $\Delta g_2 = g(2n) - g(3n)$ ；二差  $\Delta^2 g_i$  由相邻一差相较得出，如  $\Delta^2 g_1 = \Delta g_2 - \Delta g_1$ ，为常数。设段日（段限）=  $n$ 。则：

$$\text{定差 } a = g(1n) + (\Delta g_1 - \Delta^2 g_1)$$

$$\text{平差 } b = [(\Delta g_1 - \Delta^2 g_1) - \Delta^2 g_1 / 2] / n$$

$$\text{立差 } c = (\Delta^2 g_1 / 2) n^2$$

可以看出，平立定三差的数值全由表中第 1 段的平差  $g(1n)$ 、一差  $\Delta g_1$ 、二差  $\Delta^2 g_1$  数据得出。

由平立定三差可得出日月五星盈缩（迟疾）差  $f(x)$  的算式：

$$f(x) = ax - bx^2 - cx^3$$

其次，求出定、平、立（ $a$ 、 $b$ 、 $c$ ）三差之后，即可布日月五星盈缩（迟疾）立成，给出每日（限）的盈缩（迟疾）积度  $f(x)$ 。由  $f(x) = ax - bx^2 - cx^3$ ，代入  $x = 1, 2, \dots, n$ ，可得到盈缩（迟疾）积差立成如表 10-5。

表 10-5 盈缩（迟疾）积差立成构成

积日	按日的积差 $f(x)$	一差	二差	三差
		加分	平立合差	加分立差
初日	$f(0) = 0$	$a - b - c$	$2b + 6c$	$6c$
第 1 日	$f(1) = a - b - c$	$a - 3b - 7c$	$2b + 12c$	$6c$
第 2 日	$f(2) = 2a - 4b - 8c$	$a - 5b - 19c$	$2b + 18c$	$6c$
第 3 日	$f(3) = 3a - 9b - 27c$	$a - 7b - 37c$	$2b + 24c$	$6c$
第 $n$ 日	$f(n) = na - n^2 b - n^3 c$			

这里的一差(加分)是相邻积差  $f(x)$  之较,二差(平立合差)是相邻一差(加分)之较,三差(加分立差)是前后二差之较。

很容易看出,由于三差为常数,只要得出初日的加分、平立合差和加分立差,依次加减即可造成日月五星盈缩(迟疾)立成表。

$$\text{初日加分立差(三差)}=6c$$

$$\text{初日平立合差(二差)}=2b+6c$$

$$\text{初日加分(一差)}=a-b-c$$

其中  $a$ 、 $b$ 、 $c$  即前面得出的定、平、立三差。以加分立差(常数  $6c$ )累加平立合差就得次日及以后逐日的平立合差。以平立合差减其日加分得次日加分。加分累积之和即为次日盈缩积度。

太阳运行盈缩差改正,实际上计算的是地球椭圆运动的中心差。中心差=真近点角  $v$ —平近点角  $M$ ,即由椭圆运动产生的太阳真黄经  $L$  和平黄经  $L_0$  之差。它的大小与地球轨道的偏心率  $e$  有关。考虑到  $e$  的三次项,其公式为:

$$L=L_0+2e\sin M+\frac{5}{4}e^2\sin 2M$$

$$+\frac{13}{12}e^3\sin 3M-\frac{1}{4}e^3\sin M$$

式中  $M$  为平近点角,其值为平黄经与近日点黄经之差。地球轨道偏心率很小,它的数值又随时间  $t$  有一定变化。它的高次项下降很快,所以中心差主要由  $e$  的一次、二次项决定。

授时历颁行时(1281), $e$  值约为 0.0170,由  $e$  的一次项产生的最大中心差系数为  $7013''$  或  $1^\circ.948(1^\circ56'53'')$ 。而授时历给出的最大盈缩差为  $2.4014$  度,当  $360^\circ$  制的  $2^\circ.367$  或  $2^\circ22'01''(8520''.6)$ ,显然偏大。在大衍历颁行时(724), $e$  值约为 0.0172,由  $e$  的一次项引起的最大中心差系数为  $7107''.9$  或  $1^\circ.9744(1^\circ58'28'')$ 。而大衍历给出的最大中心差系数为  $2^\circ.388=143'.3=8597''.4$ 。从这点来看,授时历精度约与大衍历相当。一般认



为,约在公元前2世纪希腊天文学家依巴谷首先发现太阳的运动有疾徐。公元2世纪托勒密将中心差系数定为 $143'$ 。大衍历、授时历的数值与此相当。大衍历、授时历都选取冬至点为日行最疾、夏至为日行最徐之处。在大衍历颁行的开元十二年(724),地球轨道近日点约在冬至点前 $8^{\circ}.6$ 。而授时历颁行的至元十八年(1281),近日点与冬至点相距仅差 $0^{\circ}.5$ 。再加上授时历采用三次差内插法,所以授时历计算日行盈缩改正比大衍历精度有所提高。

## 二、月行迟疾的计算

东汉蔡邕、刘洪等发现月亮运动有疾徐,不是均匀的。自刘洪的乾象历设月离表,以近点月为周期,逐日给出月亮实行度分。不足1日部分采用线性内插法求出。隋刘焯皇极历始创用二次等间距内插法计算月亮运动。授时历创建平立定三次差内插法使计算又前进了一大步。

授时历将一近点月分作4个“象”,每“象”又分为7段,每段又分成12限。这样,1象有7段84限,一近点月(转周)共28段336限。授时历取一转周为27.5546日。这样,1象为6.88865日,每段为0.984093日,每限是0.08200774日。

在近地点,月亮运行最疾,自近地点入转开始,每6.88865日为1象。授时历计算月行迟疾,不用日数,而用限数来表达,可以避免日的小数的麻烦。取84为初限,168为中限,336为周限。自近地点开始起算。根据入转日及分秒,入转日在转中(13.7773日)以下,为疾历;已上,减去转中,为迟历。授时历称0~84限为疾初限,85~168限为疾末限;自远地点开始,0~84限为迟初限,85~168限为迟末限。

与日行盈缩相似,根据实测,授时历给出自近地点开始1象

(84 限)7 段各段末实行度与平行度之较(积差)和平差、一差、二差各值如表 10-6。积差,以其段积限除之,为各段限平差。各段限平差与后段相减,为一差。置一差与后段一差相减为二差。因二差为常数,由一二差求法可补上初日限平差、一差、二差各值。段限数 12。

表 10-6 月行各段积差、限平差、一差、二差值

	积限	积差分	限平差	一差	二差
初日	0		[11.1100]	[0.3840]	[0.0936]
第 1 段	12	128.7120	10.7260	0.4776	0.0936
第 2 段	24	245.9616	10.2484	0.5712	0.0936
第 3 段	36	348.3792	9.6772	0.6648	0.0936
第 4 段	48	432.5952	9.0124	0.7584	0.0936
第 5 段	60	495.2400	8.2540	0.8520	0.0936
第 6 段	72	532.9440	7.4020	0.9456	0.0936
第 7 段	84	542.3376	6.4564		

根据前面所述,可得出:

$$\text{泛平积} = g(1n) = 10.7260$$

$$\begin{aligned}\text{泛平积差} &= \Delta g_1 - \Delta^2 g_1 \\ &= 0.4776 - 0.0936 \\ &= 0.3840\end{aligned}$$

$$\text{泛立积差} = \frac{1}{2} \Delta^2 g_1 = 0.0468$$

$$\begin{aligned}\text{定差 } a &= g(1n) + (\Delta g_1 - \Delta^2 g_1) \\ &= 11.1100\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{平差 } b &= [(\Delta g_1 - \Delta^2 g_1) - \Delta^2 g_1 / 2] / 12 \\ &= (0.3840 - 0.0468) / 12 \\ &= 0.0281\end{aligned}$$

$$\text{立差 } c = (\Delta^2 g_1 / 2) / n^2$$

$$=0.0468/144=0.000325$$

月行迟疾积算式为：

$$f(x)=ax+bx^2+cx^3$$

其中  $x$  为月亮过近(或远)地点前后的限数,  $x \leq 84$ 。

凡求月行迟疾,皆以入历日(疾、迟)乘 12.20 限,得数在 84 限以下为初限  $x$ ;以上转减 168 限,得数为末限  $x$ 。

迟疾差  $f(x)$

$$=x \times [\text{定差} - x \times (\text{平差} + x \times \text{立差})]$$

$$=11.110000x - 0.0281x^2 - 0.000325x^3 \times 10^{-2} \text{度}$$

$$=[11110000 - (28100 + 325 \times x) \times x] \times x \times 10^{-8} \text{度}$$

授时历将一近点月(转周)平分 4 象。从近地点开始的半周(疾历)速度减慢的情况,与从远地点开始的半周(迟历)速度加快的情况一样,故用同一算式推步,只所得积差有迟疾之别而已。

为便于计算,授时历同时也给出布太阴迟疾立成之法。由前已知,为此首先要求出初限的一差(损益分)、二差(平立合差)和三差(损益立差):

$$\text{损益立差} = 6 \times \text{立差} \ 0.000325 = 0.001950$$

初限平立合差

$$= 2 \times \text{平差} \ 0.0281 + \text{损益立差} \ 0.001950$$

$$= 0.058150$$

初限损益分(加分定差)

$$= \text{定差} \ 11.11 - \text{平差} \ 0.0281 - \text{立差} \ 0.000325$$

$$= 11.081575 \text{分}$$

以损益立差累加之,即得各限平立合差。太阴迟疾立成与太阳盈缩立成稍有不同。太阴迟疾立成到 80 限时,二差(平立合差)积至 0.21415 分,即达到平立合差之极大值。授时历给出 81 限下的平立合差为 0.017809 分,82 限下为 0.017808 分,83 限下

为 0, 是益分之终。故 83、84 限一差(损益分)数值相等。83 限的疾积度为 542.916616 分, 84 限的疾积度是 542.934424 分。自 84 限起速度从平均值逐渐变慢, 疾积度(超出平行运动之度)逐渐减少。益分自此转为损分。至 86 限, 其平立合差亦为 0.21415 分。自此以损益立差累减之, 即得每限平立合差。一直到第 167 限, 损分、疾积度(积差)又回复到 11.081575 分。第 168 限为 336 限的中点, 到达远地点, 积差为 0。至末限与初限同。各限损益分, 以其限平立合差益减损加, 即得次限损益分。以损益分益分加、损分减其限积差, 便是次限迟疾积差。太阴迟疾立成如表 10-7。

表 10-7 太阴迟疾立成

限数	日率	积差	损益分	平立合差
初限	0	0	11.081575	0.058150
1	0.0820	11.081575	11.023425	0.060100
2	0.1640	22.105000	10.963235	0.062050
3	0.2460	33.068325	10.901275	0.064000
4	0.3280	43.969600	10.837275	0.065950
80	6.5606	542.560000	0.267575	0.214150
81	6.6426	542.827575	0.053425	0.017809
82	6.7246	542.881000	0.035616	0.017808
83	6.8066	542.916616	0.017808	0
84	6.8886	542.934424	0.017808	0.017808
85	6.9706	542.916616	0.035616	0.017809
86	7.0526	542.881000	0.053425	0.21415
87	7.1346	542.827575	0.267575	0.21220
165	13.5313	33.068325	10.963325	0.06010
166	13.6133	22.105000	11.023425	0.05815
167	13.6952	11.081575	11.081575	
168 限	13.7773			

设  $x = n + s$  限,  $n$  为整数,  $s$  为小数, 则:

$$f(x) = f(n) + s\delta_n$$

$\delta_n$  为  $n$  限的损益分。

由以上布立成看出,用  $f(x) = ax + bx^2 + cx^3 = [11110000 - (28100 + 325 \times x) \times x] \times x \times 10^{-8}$  度计算迟疾差时,当  $83 \leq x \leq 85$  时所得结果,与立成表稍有差异。

《元史·历志·授时历经》还给出另一种太阴迟疾立成表,称作“迟疾转定及积度”。《明史·历志·大统历法推步》中也给出类似的数表。此表是从入转日开始以日数来计算列出月球运动超过匀速运动的积差。从远地点开始则计算列出其不及匀速运动的度数。表按日给出自入转日起每日“疾”和“迟”的积度。据此数值可很容易计算任何时刻的迟疾差。表中也给出每日所对应的初末限数。它的构造原理与上相似,就不赘述了。

授时历月行迟疾差的数值由月在近点月的位置决定。积差最大值为  $5.43$  度,合  $5^\circ.3512(19264''.2)$ 。而由现代月离理论知,最大中心差值可达  $6^\circ.5(23446'')$ 。授时历的数值偏低。月亮运动最为复杂,中心差外,出差、二均差、周年差都会对月亮位置产生很大影响。中历只考虑中心差还是不够的。

### 第三节 黄赤道差、内外度及白道交周

#### 一、黄赤道差、黄赤道内外度的计算

《元史·郭守敬传》谓,授时历有:

创法凡五事:一曰太阳盈缩。用四正定气立为升降限,依立招差求得每日行分初末极差积度,比古为密。  
二曰月行迟疾。古历皆用二十八限。今以万分日之八

百二十分为一限，凡析为三百三十六限，依垛叠招差求得转分进退，其迟疾数逐时不同，盖前所未有的。三曰黄赤道差。旧法以一百一度相减相乘，今依算术勾股弧矢方图斜直所容，求到度率积差，差率与天道实吻合。四曰黄赤道内外度。据累年实测，内外极度二十三度九十分，以圆容方直矢接勾股为法，求每日去极，与所测相符。五曰白道交周。旧法黄道变推白道以斜求斜，今用立浑比量，得月与赤道正交距春秋二正黄赤道正交一十四度六十六分，拟以为法。逐推月每交二十八宿度分，于理为尽。

上节介绍了授时历用招差法推算日月每日运行的速度和盈缩迟疾的积度。本节将讨论授时历创立弧矢割圆法用来计算黄赤道差，黄赤道内外度和白道交周的问题。

描述天体在天球上的位置，天文学通常采用地平、赤道、黄道三种坐标系。

地平坐标，取地平圈为基本平面，天顶作基本点。经过天顶、天体和天底的大圆叫地平经圈。它总与基本平面垂直。地平坐标描述天体位置的两个坐标是：地平纬度（又称高度）和地平经度（又叫方位角）。天体的高度沿地平经圈量度，指地平经圈与基本平面（地平圈）交点到天体的角距。地平经度是子午圈和通过天体的地平经圈在天顶的张角。自午（南）向西量度。即自地平圈的南点向西到经圈与地平圈交点的弧长。

在赤道坐标系中，基本平面是赤道面。而以南北天极为基本点。过北天极和天体的大圆称作赤经圈。沿赤经圈测量天体离赤道的角距离叫作赤纬。由赤道向北的赤纬为正，向南为负。赤经就是天体的赤经圈和春分点的时圈在天极的交角。也即沿赤

道量度自春分点到天体赤经圈与赤道交点的弧长。以春分点为起点,向东量度。赤经、赤纬是描述天体位置的坐标。

黄道坐标以黄道面为基本平面。南北黄极为基本点。描述天体位置的坐标是黄经和黄纬。经过两个黄极和天体的大圆(与黄道面正交)称黄经圈。天体的黄纬是沿此圈与黄道平面的角距。向北黄极方向的黄纬为正,向南为负。黄经是经过天体的黄经圈和通过春分点的黄经圈在黄极处的交角。即由春分点沿黄道到通过天体的黄经圈与黄道交点的弧长。由春分点算起,向东测量,由  $0^\circ$  到  $360^\circ$ 。

在斜交的赤道黄道上,春分、夏至、秋分、冬至四点的黄经赤经数值相同。在其他位置上,黄经赤经数值之间就有差数。由赤经求黄经,或反之,由黄经求赤经,需加上这个差值的改正。黄赤经的最大差值为  $\arcsin \lg(\epsilon/2)$ 。由黄赤交角  $\epsilon$  决定,其值约当  $2^\circ.5$ 。

自春分点至夏至点,开始时黄经增加稍快,黄经大于赤经。到赤经为  $45^\circ - \frac{1}{2} \times 2^\circ.5 = 43^\circ.75$  或黄经为  $45^\circ + \frac{1}{2} \times 2^\circ.5 = 46^\circ.25$  时,差数最大达到  $2^\circ.5$ 。这以后,赤经增加稍快,差数减小,至夏至差数又变成 0,此时黄经、赤经都等于  $90^\circ$ 。

夏至以后,赤经增加较快,待走到赤经等于  $135^\circ + \frac{1}{2} \times 2^\circ.5 = 136^\circ.25$ 、黄经为  $135^\circ - \frac{1}{2} \times 2^\circ.5 = 133^\circ.75$  时,差值达极大值  $2^\circ.5$ 。这以后,黄经增长较快,差值逐渐减小。至秋分时其差为 0,黄经、赤经同为  $180^\circ$ 。自秋分经冬至回到春分点的情况与此相同。

中国古代测量天体在星空的位置采用黄道度与赤道度来表示。它们分别沿黄道、赤道测量,但自冬至点(也可自夏至点)起算。这一点与天文学的黄经、赤经自春分点起算不同,其间有一

个象限的差别。另外,中国古代不用上述的黄道坐标系。黄道度是自冬至点到通过天体、南北天极大圆(赤经圈)与黄道交点的弧长,沿黄道量度得出的。自交点沿赤经圈至赤道的弧长,称作赤道内外度。显然黄道度与黄经概念和数值是有差别的(除起算点外,数值也不相同)。同一天体,自冬至(夏至)点,沿黄道和沿赤道测量所得的黄道度与赤道度之差,就是黄赤道差。太阳在黄道上运行。对于太阳来说,赤道内外度即太阳的赤纬。由此可得出太阳的去极度。太阳的黄赤道差,即由太阳黄道度计算赤道度所加的订正值。

已知太阳黄道度求它的赤道度和赤道内外度,古代天文学家只能在浑天仪上直接量取,没有一定的计算方法。我国后汉四分历,已注意到黄赤道的进退差,得出进差最大为3度,退差最大是4度。张衡以箴量取,将进退各定为3度。隋刘焯皇极历,初次提出了计算黄赤道差的方法,进退各取4度为限。大衍历改以5度为进退极限。这以后,直到北宋姚舜辅的纪元历,都采用比较粗疏的经验公式推步。到授时历,创用弧矢割圆法来进行计算,始开辟了一条新路。这与西方采用的球面三角法可以说是不谋而合。授时历是应用古代传世的勾股算法和北宋沈括的会圆术来解决这个疑难的。

在图10-1中,  $A$  为春分点,  $D$  为夏至点。 $\widehat{AD}$  为黄道,  $\widehat{AE}$  为赤道,  $\widehat{ED}$  为黄赤交角。设太阳位于  $B$  点, 则  $\widehat{BD}$  为黄道积度,  $\widehat{CE}$  为赤道积度,  $\widehat{CB}$  为赤道内外度。

由《明史·历志·大统历法原·弧矢割圆》知,授时历取周天365.2575度,以圆周率3除之,得周天直径 $d=121.7525$ 度,取作 $d=121.75$ 度。半径 $r=60.875$ 度。取用黄赤大距 $\widehat{ED}$ 为24度( $s=\widehat{ED}=24$ 度)。自 $D$ 作 $DK \perp OE$ 。

令 $\widehat{DE}$ 之矢 $KE=v$ ,勾股形 $OKD$ 之勾 $DK=p$ ,股 $OK=q$ 。



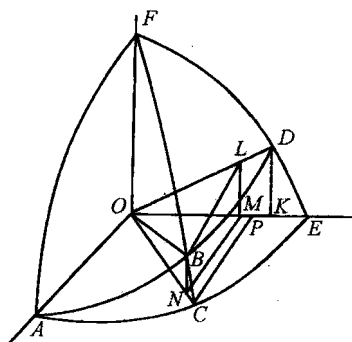


图 10-1 授时历用弧矢割圆术求黄赤道差及内外度

则根据勾股算术,有:

$$p^2 = r^2 - (r - v)^2 = dv - v^2$$

根据沈括会圆术,有:

$$s = p + v^2/d$$

从上二式中消去  $p$ ,得:

$$v^4 - (d^2 - 2ds)v^2 - d^3v + d^2s^2 = 0$$

将已知数值代入后,根据贾宪增乘开方法,求得上列四次方程的一个正根,  $v = 4.8482$  度,由此得出:

$$q = r - v = 56.0268 \text{ 度}$$

$$p = \sqrt{dv - v^2} = 23.8070 \text{ 度}$$

如果根据授时历实测得出的  $s = 23.90$  度,化为  $360^\circ$  制,得黄赤交角  $\epsilon = 23^\circ.5565$ 。周天  $365.2575$  度,以圆周率  $3.1416$  除,得周天径  $d = 116.2648$  度,半径  $r = 58.1324$  度。将这些数据代入,依照三角法计算得:

$$v = r(1 - \cos \epsilon) = 4.8444 \text{ 度}$$

$$q = r \cos \epsilon = 53.2880 \text{ 度}$$

$$p = r \sin \epsilon = 23.2328 \text{ 度}$$

从这里可以看出,授时历弧矢割圆法,取已知数周天直径  $d$

和黄赤大距  $s$  的近似值不够精密 ( $d = \text{周天度} / \text{圆周率}$ , 圆周率取 3 太粗疏)。用沈括会圆术计算  $v$ , 又不够严格, 所以得出的结果误差较大。

“求黄道各度下赤道积度和赤道内外度”, 就是从已知的黄道积度  $\widehat{BD}$  弧度求  $\widehat{CE}$  弧 (赤道积度) 和  $\widehat{CB}$  弧的度数。

先从  $B$  作  $BL \perp OD$ 。用上述弧矢算法求得  $\widehat{BD}$  弧的矢  $LD = v_1$ ,  $OLB$  勾股形的勾  $LB = p_1$ , 股  $OL = q_1$ 。

再从  $L$  作  $LM \perp OE$ , 从  $B$  作  $BN \perp OC$ 。连接  $MN$ 。不难证明,  $MN = LB = p_1$ 。设  $p_2 = BN$ ,  $q_2 = ON$ ,  $v_2 = NC$ 。因勾股形  $OML$  与  $OKD$  相似, 所以

$$BN = LM = \frac{OL}{OD} \cdot DK \quad \text{或} \quad p_2 = q_1 p / r$$

$$OM = \frac{OL}{OD} \cdot OK = \frac{q_1}{r} \cdot q$$

$$ON = \sqrt{OM^2 + MN^2}$$

故

$$q_2 = \sqrt{\left(\frac{qq_1}{r}\right)^2 + p_1^2}$$

$$NC = OC - ON$$

或

$$v_2 = r - q_2$$

因为  $r, p, q, v, p_1, q_1, v_1$  已知, 所以可求出  $v_2, p_2, q_2$ 。在扇形面积  $OBC$  内,  $\widehat{CB}$  的矢  $v_2$  和勾  $p_2$  得出, 用会圆术可求得赤道内外度  $\widehat{CB} = p_2 + v_2^2 / d$

再从  $C$  作  $CP \perp OE$ 。勾股形  $OPC$  和  $OMN$  相似。设  $p_3 = CP$ ,  $q_3 = OP$ ,  $v_3 = PE$ , 于是有:

$$CP = \frac{OC}{ON} \cdot MN \quad \text{或} \quad p_3 = r p_1 / q_2$$

$$OP = \frac{OC}{ON} \cdot OM \text{ 或 } q_3 = \frac{qq_1}{r} \cdot \frac{r}{q_2} = \frac{qq_1}{q_2}$$

$$PE = OE - OP = r - q_3 \text{ 或 } v_3 = r - q_3$$

因此,在扇形  $OCE$  中,用会圆术可得赤道积度:

$$\widehat{CE} = p_3 + v_3^2/d$$

这样,黄赤道差  $= \widehat{BD} - \widehat{CE}$ 。

授时历中勾、股、矢所表达的实际就是勾股八线中的正弦、余弦、正矢三线段。也就是在  $r=1$  的单位圆中的三角函数中的正弦、余弦和正矢(1-余弦)。设以  $\lambda$  表示黄经  $\widehat{AB}$ ,  $\alpha$  表示赤经  $\widehat{AC}$ ,  $\delta$  表示太阳赤纬  $\widehat{CB}$ ,  $\epsilon$  表示黄赤交角。当分别以半径  $r$  除下列三式两端时,

$$p_2 = q_1 p / r$$

$$p_3 = r p_1 / q_2 = r p_1 / \sqrt{\left(\frac{qq_1}{r}\right)^2 + p_1^2}$$

$$q_3 = qq_1 / q_2 = qq_1 / \sqrt{\left(\frac{qq_1}{r}\right)^2 + p_1^2}$$

可得:

$$\sin \delta = \sin \lambda \sin \epsilon$$

$$\cos \alpha = \cos \lambda / \sqrt{\sin^2 \lambda \cos^2 \epsilon + \cos^2 \lambda}$$

$$\sin \alpha = \sin \lambda \cos \epsilon / \sqrt{\sin^2 \lambda \cos^2 \epsilon + \cos^2 \lambda}$$

最后两式相除,便得:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \lambda \cos \epsilon$$

因此可看出,授时历求赤道内外度和赤道积度两个算法,实际就是球面三角学中解正弧三角形的方法。

授时历只知用勾、股,而不能用正切。由弧度求弦、矢,计算很繁重,而得数很不准确。计算得出的  $p$ 、 $q$ 、 $r$ 、 $v$  这几个数值都有一定误差,用它们求得的一系列数值及赤道内外度与黄赤道差也

都有误差。潘鼐等将授时历经中“黄赤道率”表内积度之差及其误差,与按大衍历、纪元历求得相应误差加以比较得出,授时历的数据,误差比大衍历要小,但比纪元历要差。他们认为,这并非弧矢割圆术方法上的问题,乃是所用黄赤交角与圆周率数值以及会圆术的公式欠准确的缘故<sup>①</sup>。

关于“弧矢割圆”、“割圆求矢术”、求“黄赤道差”及“黄赤道内外度”的方法、推导、示意图可参看《明史·历志·大统历法法原》。授时历经步日躔中保存有“黄赤道率”表,给出黄道积度及相应的赤道积度,黄道度率、赤道度率,积差以及差率。在步中星中保存一份“黄道出入赤道内外去极度及半昼夜分”表,给出据黄道积度得出的赤道内外度、内外差、去极度、昼夜时刻等值。

## 二、白道交周的计算

《大统历法法原》说,白道交周是推白赤道正交,距黄赤道正交极数。

月亮在白道上运行。白道与黄道有约  $5^{\circ}9'$  的交角。授时历中采用 6 度,数值偏大。授时历称月亮的降交点为“正交”,月亮轨道的升交点为“中交”。相差 1 象限处,在黄道内外 6 度时,叫作“半交”。因此,当轨道降交点在春分点时,半交在黄道外 6 度,赤道内 18 度。当降交点在秋分点时,半交在黄道外 6 度,赤道外 30 度。当升交点在春分点时,半交在黄道内 6 度,赤道内 30 度。当升交点在秋分点时,半交在黄道内 6 度,赤道外 18 度。

上述 18 度与 30 度,化为  $360^{\circ}$  制分别为  $17^{\circ}.741$  及  $29^{\circ}.569$ 。若用精确黄白交角  $5^{\circ}9'$  及黄赤交角  $23^{\circ}32'$  来计算,这两个数值应为  $18^{\circ}.4$  及  $28^{\circ}.7$ 。可见授时历取值存在一定的误差。

<sup>①</sup> 参考潘鼐,向英,《郭守敬》,上海人民出版社,1980年。

根据大统历法法原的解释,白道交周就是指,当月球轨道的升交点(或降交点)正好位于冬至点(或夏至点)时,白道与赤道交点距春分点(或秋分点)为 14.66 度。这是距交的最大值。

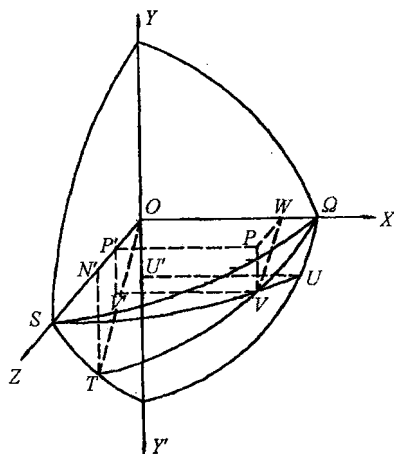


图 10-2 月轨降交点位于夏至点的白道交周

在图 10-2 中,设  $\Omega$  为秋分点,  $S$  为夏至点,  $\widehat{\Omega T}$  为赤道,  $\widehat{\Omega S}$  为黄道,  $\widehat{SU}$  为白道,  $V$  为白道和赤道交点。现将球面投影到  $OY'Z$  平面上,得白道距差图如图 10-3。黄道投影为  $OS$ ,赤道投影当  $OT$ ,白道投影是  $\widehat{SV'U}$ 。其中  $V'$ 、 $U'$  为  $V$ 、 $U$  的投影。白道  $\widehat{SVU}$  的投影  $\widehat{SV'U'}$  应系椭圆曲线,近似地视作圆弧。图 10-3 中,过  $S$ 、 $V'$ 、 $U'$  作一圆,圆心为  $O'$ 。

置实测白道出入黄道内外 6 度为  $OU'$  半弧弦,又为大圆弧矢。由前述弧矢割圆术周天径  $d121.75$  度,半径  $r=OS=60.875$  度。 $\widehat{ST}$  为黄赤大距 23.90 度。

在勾股形  $SQU'$  中,根据勾股形相似定理,得出:

$$OS^2 = OQ \times OU'$$

$$OQ = OS^2 / OU' = 60.875^2 / 6 = 617.628 \text{ 度}$$



$$OP' = ON' \cdot P'V' / TN'$$

或

$$V'R = ON' \cdot OR / TN'$$

$$V'R = 56.068 \times x / 23.710 = 2.365x$$

所以

$$\begin{aligned}(617.63 + x)(6 - x) &= (2.365x)^2 \\ &= 5.593x^2\end{aligned}$$

整理移项得出：

$$6.593x^2 + 611.63x - 3705.78 = 0$$

取正根，得  $x = 5.707$  度。大统历法原白道交周中取此值为  $5.70$  度，称作容阔。由此得出  $V'R13.48$  度，为容半长。由勾股算法及相似三角形，可算出  $OV' = 14.63$  度。

在图 10-2 的赤道平面  $\Omega TO$  中，可知  $OV' = WV$ ，在赤道平面上，根据勾股形高定理，可得出：

$$WV^2 = W\Omega \cdot (d - W\Omega)$$

$WV = OV' = 14.63$ ， $d = 121.75$ ，代入后整理得出：

$$W\Omega^2 - 121.75W\Omega + 214.0369 = 0$$

解之，得：

$$W\Omega = 1.784 \text{ 度}$$

根据会圆术，有：

$$\begin{aligned}\widehat{V\Omega} &= WV + W\Omega^2 / d \\ &= 14.63 + 1.784^2 / 121.75 \\ &= 14.63 + 0.03 = 14.66 \text{ 度}\end{aligned}$$

如根据前面得出的  $OR = V'P' = x = 5.707$  度计算，则得出  $OV' = 14.655$  度， $W\Omega = 1.79$  度，最后得出的  $\widehat{V\Omega}$  为  $14.68$  度，相差  $0.02$  度。

$\widehat{V\Omega}14.66$  度，就是授时历得出的白赤道正交，距黄赤道正交极数。

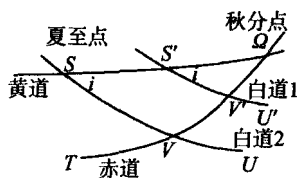


图 10-4 黄白交点不在二至点的白赤道交点位置

如果黄白交点不在二至点上,而是在二至点与二分点之间,如图 10-4 中  $S'$ 。斯时赤白交点  $V'$  到二分点的距离  $\widehat{V'\Omega}$ ,显然小于  $\widehat{V\Omega}$ ,所以  $\widehat{V\Omega}$  是赤白交点距黄赤交点(二分点)的最大距弧,当  $S'$  位于  $S, \Omega$  之间时,称  $SS'$  为初限;若在  $\Omega$  以东,则用半周天减去  $SS'$ ,余数仍小于 1 象限,称为末限。在图 10-4 中,设  $S'U'$  为观测时的白道,  $SS'$  为初限,  $S'$  在  $S\Omega$  之间。

近似地将球面三角形  $SV\Omega$  视作平面三角形。在  $S'V'\Omega$  和  $SV\Omega$  两三角形中,黄白交角  $i$  角相近,可视为相似形。故有:

$$\begin{aligned} VV' &= V\Omega \times SS' / S\Omega \\ &= (14.66/91.314375) \times \text{初末限} \end{aligned}$$

$\widehat{VV'}$  称作定差,于是有:

$$\begin{aligned} \widehat{V'\Omega} &= \widehat{V\Omega} - \widehat{VV'} = 14.66 - \text{定差} \\ &= 14.66 - \text{初末限} \times 14.66/91.314375 \end{aligned}$$

$\widehat{V'\Omega}$  称为距差,乃观测时任意白道和赤道的交点与黄赤交点(春分点或秋分点)间的距弧。

白道赤道交角,也就是白道赤道两交点(正交、中交)间中点(又称半交)处的白道出入赤道内外度(距弧)。《元史·历志·步月离》给出计算它的经验公式:

$$\begin{aligned} &\text{月离赤道后半交白道出入赤道内外度分(白赤交角)} \\ &= 23.90 \text{ 度} \pm \text{定差度分}(VV') \times 25/61 \end{aligned}$$

月离黄道正交(即图中  $S'$  点)在冬至后宿度取减号,夏至后宿度用加号。月离赤道正交后(降交)为外,中交(升交)后为内。具



体推步方法将在步月离术中再做介绍。

#### 第四节 五星盈缩的计算及布立成

与日行盈缩、月行迟疾一样，授时历也用招差法计算五星运动的盈缩。

五星运动比较复杂。授时历把行星运动一周天 365.2575 度，等分成 4 个象限。只有火星例外。火星分作 4 象，其中盈初、缩末两象只用 2/3 象限，缩初、盈末两象各占 4/3 象限。即火星的盈初、缩末限合用 1/3 周天度，缩初、盈末限各用 1/3 周天度 (121.7525 度)。再把木、土、水、金每一象限和火星的盈初、缩末、缩初、盈末限行度各分成 8 段。这样，木、土、水、金四星每段长 11.4143 日。为便于观测和计算取作 11.50 日。火星盈初缩末限每段长 7.6095 日，缩初盈末限每段长 15.2190625 日。出于同样理由分别取为 7.625 日和 15.25 日。根据实测给出五星各自积差表。

木星盈缩积差表如表 10-8 (立差加，平差减)。

表 10-8 木星盈缩积差表

段次 $i$	积日 $in$	积差 $f(in)$	泛平差 $g(in)$	泛平较 $\Delta g_i$	泛立较 $\Delta^2 g_i$
初日			0.10897000	0.00329199	0.00062422
第 1 段	11.50	1.215297115	0.10567801	0.00391621	0.00062422
第 2 段	23	2.3405214	0.1017618	0.00454043	0.00062422
第 3 段	34.50	3.354137265	0.09722137	0.00516465	0.00062422
第 4 段	46	4.23460912	0.09205672	0.00578887	0.00062422
第 5 段	57.5	4.960401375	0.08626785	0.00641309	0.00062422
第 6 段	69	5.50997844	0.07985476	0.00703721	0.00062422
第 7 段	80.5	5.861804725	0.07281745	0.00766153	
第 8 段	92	5.99434464	0.06515592		

根据定义，可补上初日泛平差、泛平较、泛立较之值。

泛平差 = 所测积差 / 该段积日

泛平较 = 次段泛平差 - 本段泛平差

泛立较为次段泛平较与本段泛平较表列数值之差。

初段平立较 =  $\Delta g_1 - \Delta^2 g_1$

$$= 0.00391621 - 0.00062422$$

$$= 0.00329199$$

定差  $a = -$  一段泛平差  $g(1n) + (\Delta g_1 - \Delta^2 g_1)$

$$= 0.10567801 + 0.00329199$$

$$= 0.1089700$$

平差  $b = [(\Delta g_1 - \Delta^2 g_1) - \Delta^2 g_1 / 2] / \text{段日 } n (11.5 \text{ 日})$

$$= [(0.00329199 - 0.00031211)] / 11.5$$

$$= 0.00025912$$

立差  $c = (\Delta^2 g_1 / 2) / n^2 = 0.00000236$

由泛平较、泛立较定义知，表中泛平较  $\Delta g_i < 0$ ,  $\Delta^2 g_i > 0$ 。故得出平差  $b$  减，立差  $c$  加。

火星缩初盈末积差表（见表 10-9，平差负减，立差加）中，取四次差  $\Delta^3 g_i$  为 0 的  $\Delta^2 g_i 0.000395821$  为泛立较。

较较 =  $\Delta^2 g_i - \Delta g_1$

$$= 0.00395821375 - 0.001326483125$$

$$= 0.002631731$$

定差  $a = g(1n) + \text{较较}$

$$= 0.29713127 + 0.00263173$$

$$= 0.2997630$$

平差  $b = \text{较较} / \text{段日 } n + [(\text{泛立较}) / 2] / \text{段日 } n$

$$= 0.00263173 / 15.25$$

$$+ (0.0039582138 / 2) / 15.25$$

$$= 0.00030235$$

$$\text{立差 } c = (\text{泛立较 } \Delta^2 g_i / 2) / n^2$$

$$= 0.000851$$

由泛平较、泛立较定义知,表中  $\Delta g_i < 0$ ,泛平差前大后小,  $\Delta^2 g_i$  为正值,泛平较前小后大。所以立差  $c$  为加。平差应为  $b = [(\Delta g_1 - \Delta^2 g_1) - \Delta^2 g_1 / 2] / \text{段日 } 11.5$ 。但这里  $\Delta g_1 < \Delta^2 g_i$ 。所以  $b = [\Delta g_1 - \frac{3}{2} \Delta^2 g_i] / n = \Delta g_1 / n - \frac{3}{2} \Delta^2 g_i / n$ 。古代只做正数运算,反减之,而得  $b = (\frac{3}{2} \Delta^2 g_i - \Delta g_1) / n = [(\Delta^2 g_i - \Delta g_1) + \frac{1}{2} \Delta^2 g_i] / n = (\Delta^2 g_i - \Delta g_1) / n + \Delta^2 g_i / 2n$ 。这样,平差  $b$  为负减。

表 10-9 火星缩初盈末积差表

段次 $i$	积日 $in$	积差 $f(in)$	泛平差 $g(in)$	泛平较 $\Delta g_i$	泛立较 $\Delta^2 g_i$
初日	0		0.2997630	0.00263173	0.00395821
第 1 段	15.25	4.53125186	0.29713127	0.00132648	0.00135770
第 2 段	30.5	9.10296145	0.29845775	0.00268418	0.00655873
第 3 段	45.75	13.53167090	0.29578355	0.00924291	0.00395821
第 4 段	61.0	17.47897904	0.28654064	0.01320112	0.00395821
第 5 段	76.25	20.84366307	0.27333951	0.01715934	0.00395821
第 6 段	91.50	23.43133624	0.25618018	0.02111755	0.00395821
第 7 段	106.75	25.09243528	0.23506263	0.02507577	
第 8 段	122.0	25.61837472	0.20998686		

火星盈初缩末积差表(见表 10-10,立差减,平差减)中,泛平较前多后少,应加泛立较。

表 10-10 火星盈初编末积差表

段次	积日	积差	泛平差	泛平较	泛立较
第 1 段	7.625	6.26825123	0.822065735	0.06139847	0.001319792
第 2 段	15.25	11.60017574	0.76066726	0.06007868	0.001319792
第 3 段	22.875	16.02596379	0.70058858	0.05875889	0.001319792
第 4 段	30.50	19.66901362	0.64182969	0.05743910	0.001319792
第 5 段	38.125	22.27989148	0.58439060	0.05611930	0.001319792
第 6 段	45.75	24.16822860	0.52827129	0.05479951	0.001319792
第 7 段	53.375	25.33155625	0.47347178	0.05347972	
第 8 段	61.00	25.61951566	0.419992060		

$$\text{初日下平立较} = \Delta g_1 + \Delta^2 g_1$$

$$= 0.061398473 + 0.001319792$$

$$= 0.062718265$$

$$= \Delta g_1 - (-\Delta^2 g_1)$$

$$\text{定差} = g(1n) + \text{初日下平立较}$$

$$= g(1n) + (\Delta g_1 + \Delta^2 g_1)$$

$$= 0.822065735 + 0.062718265$$

$$= 0.884784$$

$$\text{平差} = (\text{初日下平立较} + \frac{1}{2} \text{泛立较}) / \text{段日 } n$$

$$= [\Delta g_1 - (-\Delta^2 g_1) - (-\frac{1}{2} \Delta^2 g_1) / 2] / 7.625$$

$$= (0.062718265 + 0.001319792 / 2) / 7.625$$

$$= 0.00831189$$

$$\text{立差} = \frac{1}{2} \Delta^2 g_1 / n^2 = (-\Delta^2 g_1) / (2 \times 7.625^2)$$

$$= 0.00001135$$

泛平较值是负数( $\Delta g_1 < 0$ ),故平差为减。泛平较数值前大后小,所以泛立较值也是负数。即  $\Delta^2 g_1 < 0$ ,故立差  $c$  也为减。

土星盈历积差表(见表 10-11,立差加,平差减)中,泛平差前大后小,泛平较前小后大,泛平较数值大于  $1.5 \times$  泛平较,故平差减,立差加。

$$\begin{aligned}\text{初日平立较} &= \text{第 1 段泛平较} - \text{泛立较} \\ &= \Delta g_1 - \Delta^2 g_1 = 0.00509180\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{定差} &= \text{初日平立较} + \text{第 1 段泛平差} \\ &= g(1n) + (\Delta g_1 - \Delta^2 g_1) \\ &= 0.151461\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{平差} &= (\text{初日平立较} - 0.5 \times \text{泛立较}) / \text{段日 } n \\ &= [(\Delta g_1 - \Delta^2 g_1) - 0.5 \times \Delta^2 g_1] / 11.50 \\ &= 0.00041022\end{aligned}$$

$$\text{立差} = 0.5 \times \text{泛立较} / n^2 = 0.00000283$$

土星缩历积差表(立差加,平差减)也列于表 10-11,与盈历相同,泛平差数值前大后小,泛平较数值为减。泛平较数值前小后大,故泛立较数值为加。

$|\Delta g_1| > 1.5 \times \Delta^2 g_1$ , 平差为减,立差为加。

$$\begin{aligned}\text{平立较} &= \text{第 1 段泛平较 } \Delta g_1 - \text{第 1 段泛立较 } \Delta^2 g_1 \\ &= 0.00217724\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{定差 } a &= g(1n) + (\Delta g_1 - \Delta^2 g_1) \\ &= 0.110175\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{平差 } b &= [(\Delta g_1 - \Delta^2 g_1) - 0.5 \times \Delta^2 g_1] / n \\ &= 0.00015126\end{aligned}$$

$$\text{立差 } c = 0.5 \times \Delta^2 g_1 / n^2 = 0.00000331$$

金星盈缩积差表(表 10-12,立差加,平差减)与土星盈缩积差表相似,泛平差前多后少,泛平较数值为负值,故平差为减;泛

表 10-11 土星盈历、缩历积差表

段次	积日	盈历积差	泛平差	泛平较	泛立较	缩历积差	泛平差	泛平较	泛立较
第 1 段	11.50	1.68324583	0.14636920	0.00584033	0.000748535	1.24197427	0.10799776	0.00305273	0.000875495
第 2 段	23.0	3.23216401	0.14052887	0.00658887	0.000748535	2.41373569	0.10494503	0.00392823	0.000875495
第 3 段	34.5	4.62093009	0.13394000	0.00733740	0.000748535	3.48507969	0.10101680	0.00480372	0.000875495
第 4 段	46.0	5.82371960	0.12660260	0.00808594	0.000748535	4.42580168	0.09621308	0.00567922	0.000875495
第 5 段	57.5	6.81470867	0.11851666	0.00883447	0.000748535	5.20569709	0.09053286	0.00655471	0.000875495
第 6 段	69.0	7.56807111	0.10968219	0.00958301	0.000748535	5.79456135	0.08397915	0.00743031	0.000875495
第 7 段	80.5	8.05798419	0.10009918	0.01033154		6.16241100	0.07654894	0.00830571	
第 8 段	92.0	8.25862288	0.08976764			6.27837808	0.06824324		

平较数值(绝对值)前少后多,泛立较数值为正,故立差为加。

表 10-12 金星盈缩积差表

段次	积日	积差	泛平差	泛平较	泛立较
第 1 段	11.5	0.40213410	0.03496818	0.00055976	0.000372945
第 2 段	23	0.79139366	0.03440842	0.00093271	0.000372945
第 3 段	34.5	1.15491208	0.03347571	0.00130655	0.000372945
第 4 段	46	1.74982276	0.03217006	0.00167860	0.000372945
第 5 段	57.5	1.75325909	0.03049146	0.00205154	0.000372945
第 6 段	69	1.96235448	0.02843992	0.00242449	0.000372945
第 7 段	80.5	2.09424232	0.02601543	0.00279743	
第 8 段	92	2.13605600	0.023218		

$$\text{平立较} = \Delta g_1 - \Delta^2 g_1 = 0.000186818$$

$$\text{定差 } a = 0.035155 = \Delta g_1 - \Delta^2 g_1 + g(1n)$$

$$\begin{aligned} \text{平差 } b &= [(\Delta g_1 - \Delta^2 g_1) - 0.5 \times \Delta^2 g_1] / 11.5 \\ &= 0.00000003 \end{aligned}$$

$$\text{立差 } c = 0.5 \times \Delta^2 g_1 / 11.5^2 = 0.00000141$$

水星与土、金相似,泛平差前多后少,平差为减,立差为加。  
水星盈缩积差表见表 10-13。

表 10-13 水星盈缩积差表

段次	积日	积差	泛平差	泛平较	泛立较
第 1 段	11.5	0.44084735	0.03833455	0.00080839	0.000372945
第 2 段	23	0.86310168	0.03752616	0.00118134	0.000372945
第 3 段	34.5	1.25389638	0.03634482	0.00155428	0.000372945
第 4 段	46	1.60036484	0.03479054	0.00192723	0.000372945
第 5 段	57.5	1.88963104	0.03286331	0.00230017	0.000372945
第 6 段	69	2.10885666	0.03056314	0.00267312	0.000372945
第 7 段	80.5	2.24529211	0.02789002	0.00304606	
第 8 段	92	2.28564432	0.02484396		

$$\text{平立较} = 0.0004354475$$

$$\text{定差 } a = 0.038770$$

$$\text{平差 } b = 0.00002165$$

$$\text{立差 } c = 0.00000141$$

以上根据授时历五星实测得出的积差表,经计算给出了水、火、木、金、土五星盈缩的平立定三差数值。根据  $F(x) = ax + bx^2 + cx^3$ ,即可计算五星运动盈缩差。

《元史·历志·步五星》说,置各星立差( $c$ ),以初末限( $x$ )乘之,去加减平差( $b$ ),所得又以初末限乘之,去加减定差( $a$ ),再以初末限  $x$  乘之,满亿为度,不满退除为分秒,即所求盈缩差  $F(x)$ 。

$$F(x) = x \times [\text{定差 } a \pm x \times (\text{平差 } b \pm x \times \text{立差 } c)]$$

《元史·历志·步五星》给出的五星平立定三差值与我们上面推出的完全相同。只是为了便于整数运算,元史历志步五星术的三差数值各乘了  $10^8$ 。故所得结果需要“满亿为度”,即需要乘  $10^{-8}$  后,才能得到以度为单位表示的盈缩差。

还有一点需要注意的,元史及上面推导给出的平差、立差的加减号,是供元史所书盈缩差公式使用的。与采用  $F(x) = ax + bx^2 + cx^3$  公式计算的  $b$ 、 $c$  正负符号有时是不同的。

授时历用招差法计算日月五星盈缩迟疾的内插方法与牛顿向前插值公式一样。

$$\begin{aligned} f(x_0 + th) = & y_0 + \frac{t}{1} \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 \\ & + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \Delta y_0 = y_1 - y_0, \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$$

授时历中有  $f(x)/x = g(x)$ ,  $g(x)$  为平差。  $\Delta g_0 = g(1n) - g(0)$ ,  $\Delta^2 g_0 = \Delta g_1 - \Delta g_0$ , 三次差为 0。

令  $x = tn$ ,  $i$  为段次,  $n$  是段长,  $t \in [0, i]$ 。则  $x$  日的段数  $= \frac{x}{n}$ 。



以  $g(x)$  作  $f(x)$  代入上式, 有:

$$\begin{aligned}
 g(x_0+x) &= g(0) + \frac{x}{n} \Delta g_0 + \frac{1}{2} \frac{x}{n} \left( \frac{x}{n} - 1 \right) \Delta^2 g_0 \\
 &= g(0) + \frac{x}{n} \Delta g_0 + \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{n^2} - \frac{x}{n} \right) \Delta^2 g_0 \\
 &= g(0) + \left( \frac{\Delta g_0}{n} - \frac{\Delta^2 g_0}{2n} \right) x + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 g_0}{n^2} x^2 \\
 &= g(1n) - \Delta g_0 + \left( \frac{\Delta g_0}{n} - \frac{\Delta^2 g_0}{2n} \right) x + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 g_0}{n^2} x^2 \\
 &= g(1n) - (\Delta g_1 - \Delta^2 g_0) \\
 &\quad + \frac{x}{n} \left( \Delta g_1 - \Delta^2 g_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 g_0 \right) + \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 g_0}{n^2} x^2 \\
 &= a + bx + cx^2
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 a &= g(1n) - (\Delta g_1 - \Delta^2 g_0) \\
 b &= \left[ (\Delta g_1 - \Delta^2 g_0) - \frac{1}{2} \Delta^2 g_0 \right] / n \\
 c &= \frac{1}{2} \Delta^2 g_0 / n^2
 \end{aligned}$$

平差  $g(1n)$  总是正数, 一次差  $\Delta g$ 、二次差  $\Delta^2 g$  有正有负。二次差为常数。因此, 定差  $a$  总是正数, 平差  $b$ 、立差  $c$  可正可负。由下式计算盈缩差:

$$\text{盈缩差 } f(x) = ax + bx^2 + cx^3$$

下面据此再重新计算五星的平( $b$ )立( $c$ )定( $a$ )三差。这里代数运算与上述历表全用正数不同。

木星: 泛平较  $\Delta g_i < 0$ , 泛立较  $\Delta^2 g_i < 0$ 。

$$\begin{aligned}
 a &= g(1n) - (\Delta g_1 - \Delta^2 g_0) \\
 &= 0.10567801 - (-0.00391621 + 0.00062422) \\
 &= 0.10897
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= (\Delta g_1 - 1.5 \times \Delta^2 g_0) / n \\
 &= (-0.00391621 + 1.5 \times 0.00062422) / 11.5 \\
 &= -0.00025912 \\
 c &= 0.5 \times \Delta^2 g_0 / n^2 = -0.00000236
 \end{aligned}$$

火星缩初盈末历: 泛平较  $\Delta g_i < 0$ , 泛立较  $\Delta^2 g_i < 0$ 。因  $\Delta g_1 > 0$ ,  $\Delta^2 g_i > \Delta g_1$ , 术用较较, 相当于取  $\Delta^2 g_0 = 0.00395821$ 。

$$\begin{aligned}
 a &= g(1n) - (\Delta g_1 - \Delta^2 g_0) \\
 &= 0.29713127 - (0.00132648 - 0.00395821) \\
 &= 0.2997630 \\
 b &= (\Delta g_1 - 1.5 \times \Delta^2 g_0) / n \\
 &= (0.00132648 - 1.5 \times 0.00395821) / 15.25 \\
 &= -0.00030235 \\
 c &= 0.5 \times \Delta^2 g_0 / n^2 = 0.00000851
 \end{aligned}$$

火星缩初盈末历  $\Delta^3 g_0$ 、 $\Delta^3 g_1$  不为 0, 所以历术用特殊方法处理。

火星盈初缩末历: 泛平较  $\Delta g_i < 0$ , 泛立较  $\Delta^2 g_i > 0$ 。

$$\begin{aligned}
 a &= g(1n) - (\Delta g_1 - \Delta^2 g_0) \\
 &= 0.822065735 - (-0.06139847 - 0.001319792) \\
 &= 0.884784 \\
 b &= (\Delta g_1 - \Delta^2 g_0 - 0.5 \times \Delta^2 g_0) / n \\
 &= (-0.06139847 - 1.5 \times 0.001319792) / 7.625 \\
 &= -0.00831189 \\
 c &= 0.5 \times \Delta^2 g_0 / n^2 = 0.00001135
 \end{aligned}$$

土星盈历: 泛平较  $\Delta g_i < 0$ , 泛立较  $\Delta^2 g_i < 0$ 。

$$\begin{aligned}
 a &= 0.14636920 - (-0.00584033 + 0.000748535) \\
 &= 0.151461 \\
 b &= (\Delta g_1 - 1.5 \times \Delta^2 g_0) / n
 \end{aligned}$$

$$=-0.00041022$$

$$c=0.5 \times \Delta^2 g_0 / n^2 = -0.00000283$$

土星缩历: 泛平较  $\Delta g_i < 0$ , 泛立较  $\Delta^2 g_i < 0$ 。

$$a=0.110175$$

$$b=-0.00015126$$

$$c=-0.00000331$$

金星盈缩历: 泛平较、泛立较皆小于 0。

$$a=0.035155$$

$$b=-0.00000003$$

$$c=-0.00000141$$

水星盈缩历: 泛平较、泛立较全为负数。

$$a=0.038770$$

$$b=-0.00002165$$

$$c=-0.00000141$$

939

可以看出, 平立定三差数值相同。但由于采用公式不同, 立差  $c$  的符号大多相反。所得盈缩差结果完全一致。

求出了五星盈缩的平立定三差后, 就可以利用上述的  $f(x)$ 、 $F(x)$  公式, 计算任一  $x$  的盈缩差了。但这样做, 要经过多次加减、乘方的运算。为了简便, 可以计算列出每日五星的盈缩积差的数表。这就是布五星立成。

由  $f(x)=ax+bx^2+cx^3$  知道, 要计算每日的盈缩差, 只要将  $x=1, 2, 3 \dots$  代入上式即可。根据差分的定义, 知一次差 (加分)  $\Delta_0=f(1)-f(0), \Delta_1=f(2)-f(1), \dots, \Delta_n=f(n+1)-f(n)$ ; 二次差  $\Delta_0^2=\Delta_1-\Delta_0, \Delta_1^2=\Delta_2-\Delta_1, \dots$ ; 三次差  $\Delta_0^3=\Delta_1^2-\Delta_0^2, \Delta_1^3=\Delta_2^2-\Delta_1^2, \dots$ , 可以得出与表 10-5 完全类似的五星盈缩积差立成。因所用  $f(x)=ax+bx^2+cx^3$ , 与表 10-5  $f(x)=ax-bx^2-cx^3$  不同, 立成中积差、加分 (一次差) 各项系数符号皆为正号。如  $x=$

$n$  日的积差  $f(n) = na + n^2b + n^3c$  等与表 10-5 稍异。以  $x=3$  为例,  $f(3) = 3a + 9b + 27c$ , 加分为  $a + 7b + 37c$ ; 而在表 10-5 中,  $f(3) = 3a - 9b - 27c$ , 加分是  $a - 7b - 37c$ 。

立成中, 三次差(加分立差)其值  $6c$  已为常数。因此, 知道了  $a, b, c$  定平立三差后, 即可求出初日的一次差(加分)  $A = a + b + c$ , 二次差(平立合差)  $B = 2b + 6c$ , 三次差(加分立差)  $C = 6c$ 。以加分立差  $C$ , 加平立合差  $B$ , 即得次日平立合差;  $B$  累加  $C$ , 即得逐日平立合差。以初日平立合差加初日加分, 得次日(1 日)加分。每日的平立合差加其日加分, 即得次日加分。其加分累积之, 得次日盈缩积差。即  $f(n) = \sum_0^{n-1} \text{加分}$ 。

求出了五星的定平立三差  $a, b, c$  后, 即可根据  $A = a + b + c$ ,  $B = 2b + 6c$ ,  $C = 6c$  得出初日的各次差。这样, 只要根据  $a, b, c$  的数值, 只用加减法, 就可得出五星盈缩立成表。

根据五星盈缩立成, 可以很容易得出五星盈缩差。如  $x$  不是整数, 设  $x = m + t$ ,  $m$  为整数,  $0 < t < 1$ , 则  $f(x) = f(m) + t\Delta m$ ,  $f(m)$  为表内第  $m$  日的盈缩积差,  $\Delta m$  为表内第  $m$  日的加分值。

现以木星为例, 用上述方法, 布木星盈缩立成如表 10-14。

表 10-14 木星盈缩立成(日)

积日	盈缩积度	加分	平立合差	加分立差
0		0.10870852	-0.00053240	-0.00001416
1	0.10870852	0.10817612	-0.00054656	-0.00001416
2	0.21688464	0.10762956	-0.00056072	-0.00001416
3	0.32451420	0.10706884	-0.00057488	-0.00001416
4	0.43158304	0.10649396	-0.00058904	-0.00001416

$$a = 0.10897$$

$$b = -0.00025912$$

$$c = -0.00000236$$

$$A = 0.10870852$$

$$B = -0.00053240$$

$$C = -0.00001416$$

古代不用负数运算,定平立三差皆为正值。运算中加减有时与上述不同。因此布立成时有:

$$A = a - b - c, B = 2b + 6c, C = 6c$$

$A, B, C$  为初日加分、平立合差和加分立差。

加分立差为常数,每日相同。

$$\text{次日(1日)平立合差} = B + C$$

$$2 \text{ 日平立合差} = B + 2C$$

$$3 \text{ 日平立合差} = B + 3C$$

累加,得每日平立合差。

$$\text{次日(1日)加分} = \text{初日加分 } A - \text{初日平立合差 } B$$

$$\begin{aligned} 2 \text{ 日加分} &= 1 \text{ 日加分}(A - B) - 1 \text{ 日平立合差}(B + C) \\ &= A - 2B - C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \text{ 日加分} &= 2 \text{ 日加分}(A - 2B - C) - 2 \text{ 日平立合差}(B + 2C) \\ &= A - 3B - 3C \end{aligned}$$

$(n+1)$  日加分  $= n$  日加分  $- n$  日平立合差加分累积之,即盈缩积分  $f(x)$ 。

$$f(n+1) = \sum_0^n \text{加分}$$

这样得到的五星盈缩立成与前数值(表 10-14)相同,而没有负数出现。

《元史·历志·授时历经·步五星》中,介绍了根据五星平合及诸段入历度(距近日点的角度)求盈缩差的两种方法。

其一,根据五星入历度的盈缩初末限  $x$ ,由

$$F(x) = x[\text{定差} \pm x(\text{平差} \pm x \times \text{定差})]$$

计算得出。

其二,利用五星盈缩立成,线性内插得到。方法是:置盈缩历

$x$ , 以历策(15.2190625度)除之, 为策数  $m$ , 不尽为策余  $t$  (不足一策的度数)。以立成表  $m$  策条下的损益率与  $t$  相乘, 再以历策除之, 得数, 益加损减  $m$  策条下的盈缩积, 即得所求盈缩差。

这里说的五星盈缩立成表,《授时历》中没有刊出。它保存在《明史·历志·大统历法·立成》中。是表与我们上面根据定平立三差计算得出的五星盈缩立成不同。它比较简单, 将周天分为 24 历策, 盈历、缩历各 12 历策。历策 15.2190625 度。木、火、土、金、水五星各有一份盈缩立成表。另外还有一份五星同用的“五星盈缩入历度率立成”, 给出每一历策起始的度数。五星盈缩立成包含 5 栏: 策次, 损益率, 盈缩积, 行定度, 行积度。虽名曰立成, 但与前述“五星盈缩积差表”类似, 其“损益率”或“盈缩积”(即积差)为实测校核得出。表 10—15 以木星盈缩立成为例, 略做说明。

水、金、火、木、土五星和地球一样, 在椭圆轨道上绕日公转。在近日点, 运行速度最快。就木星而言, 从近日点开始的一个历策, 比平行 15.2190625 度多行 1.59008481 度, 所以初策的行定度为  $15.2190625 + 1.59008481 = 16.80914731$  度。比平行多行的 1.59008481 度, 称作益率, 相当于前面推导的立成表中的加分。以后速度逐渐变缓。6 策(1 个象限)后等于平行速度。这一象限称作盈初限。它超过按匀速所多行的度数, 即盈积度为 5.99298028 度, 将近 6 度。以后继续减慢, 又行 1 象限(6 策)到达远日点, 速度最慢。在远日点前后各一历策(盈历的第 11 策, 缩历的初策), 木星运行比匀速运动少行 1.59008481 度, 所以行定度为  $15.2190625 - 1.59008481 = 13.62897769$  度。比平行少行的度数, 称作盈历的损率、缩历的益率。从近日点到远日点的半周叫盈历(远日点至近日点的半周称缩历)。从等速运动到远日点这一象限, 称作盈末限。前一段(盈初限)所多行的近 6 度盈积度, 因这段木星速度不及平均数而被抵消掉。故缩历开始时, 即

表 10-15 木里盈續立成(历史)

历表	损益率度	盈积度	行定度	行积度	损益率度	缩积度	行定度	行积度
初 益	1.59008481	0	16.80914731	16.80914731	益 1.59008481	0	13.62897769	196.25772969
1	1.42013561	1.59008481	16.63919811	33.44834542	1.42013561	1.59008481	13.79892689	210.05665458
2	1.20027188	3.01022042	16.41933438	49.86767980	1.20027188	3.01022042	14.01879062	224.07544520
3	0.93049362	4.21049230	16.14955612	66.01723590	0.93049362	4.21049230	14.28856888	238.36401408
4	0.61080083	5.14098592	15.82986333	81.84709925	0.61080083	5.14098592	14.60826167	252.97227575
5	0.24119352	5.75178676	15.46025602	97.30735527	0.24119352	5.75178676	14.97786898	267.95014473
6	损 0.24119352	5.99298028	14.97786898	112.28522425	损 0.24119352	5.99298028	15.46025602	283.41040075
7	0.61080083	5.75178676	14.60826167	126.89348591	0.61080083	5.75178676	15.82986333	299.24026408
8	0.93049362	5.14098592	14.28856888	141.18205480	0.93049362	5.14098592	16.14955612	315.38988020
9	1.20027188	4.21049230	14.01879062	155.20084542	1.20027188	4.21049230	16.41933438	331.180915458
10	1.42013561	3.01022042	13.79892689	168.99977231	1.42023561	3.01022042	16.63919811	348.44835269
11	1.59008481	1.59008481	13.62897769	182.62875000	1.59008481	1.59008481	16.80914731	365.25750000

远日点时盈缩积度又等于 0。

从远日点开始,速度渐增。木星运行一象限,刚好速度等于平均数。这一段称作缩初限。在这一象限,木星速度不足平均数,比匀速运动 91.314375 度少行的度数,即缩积度亦为 5.99298028 度。以后星行超过平均速度,少行之度渐渐被补回来。到达近日点时,正好补完。这一段称作缩末限。

由此看出,五星盈缩立成中,损益率是该历策内,行星实行比等速运行 15.2190625 度多走或少走的度数。盈缩积是这一历策开始时行星累计比匀速运动多走或少走的积度,其数值为其前各历策损益率的代数和(益加损减)。亦即以每策的损益率,益加损减其策盈缩积得次策的盈缩积。行定度是每策行星实际运行的度数。其值盈历为各策损益率,益加损减平行度 15.2190625 度;缩历为各策损益率,益减损加平行度 15.2190625 度。即各策行定度 = 历策土损益率(度)。行积度即行定度的驯积,是行星在该策结束时累计实际运行的度数。即

$$\begin{aligned} n \text{ 策的行积度} &= \sum_0^n \text{行定度} \\ &= (n-1) \text{策行积度} + n \text{策行定度} \end{aligned}$$

五星盈缩立成中,损益率或盈缩积由实测校验得出后,其他数值皆可由此导出。

有了五星盈缩立成表,根据上述方法,就可以内插得出任一入历度  $x$  的盈缩差。

在后面介绍步五星术时,将说明采用定平立三差算式  $F(x)$  计算和根据五星盈缩立成得出的盈缩差,数值并不完全相同。笔者考查得出,其间可有十余分(百分为度)的差别。

为配合五星盈缩立成,大统历法还给出五星盈缩入历度率立成(五星通用),如表 10-16,实际上,这是将半周平分 12 历策,每策起始的度数。



表 10-16 五星盈缩入历度率

历策	度率	历策	度率
1	15.21906250	7	105.53343750
2	30.43812500	8	121.75250000
3	45.65718750	9	136.97156250
4	60.87625000	10	152.19062500
5	76.09531250	11	167.40968750
6	91.31437500		

五大行星与地球一样绕日公转。授时历计算五星盈缩差,实际上就是椭圆运动的中心差。它由轨道的偏心率 $e$ 的大小决定。只考虑 $e$ 的一次差,将授时历给出的最大盈缩差与由 $e$ 得出的中心差比较,如表 10-17 所示。

由表看出,木星较为准确。土星稍疏,水、金、火三星误差很大。

表 10-17 授时历盈缩差与中心差比较

	最大盈缩积			$e_c$	$e_0$	中心差	
		(°)	(")			(")	(°)
木星	5.99298	5.9068	21264.5	0.0515	0.048	19801.44	5.5004
火星	25.61978	25.2515	90905.4	0.2204	0.93	38365.29	10.6570
土星	8.25524	8.1366	29291.7	0.0710	0.055	22689.15	6.3025
金星	2.13632	2.1056	7580.2	0.0184	0.0067	2763.95	0.7678
水星	2.28615	2.2533	8111.9	0.0197	0.2056	84816.17	23.5600

945

## 第五节 步气朔、步日躔及太阳过宫

### 一、步气朔闰

#### (一)基本法数

至元十八年岁次辛巳(1281)为元。

日周 10000。

日 10000 分。

日 100 刻。

刻 100 分。

分 100 秒。

秒 100 微。

岁实 = 岁周 = 365.2425 日 = 3652425 分。

半岁周 = 岁周 / 2 = 182.62125 日。

通余 = 通盈分 = 岁实 - 360 = 5.2425 日 = 52425 分。

朔实 = 朔策 = 29.530593 日。

望策 = 朔策 / 2 = 14.7652965 日。

弦策 = 朔策 / 4 = 7.38264825 日。

朔虚 = 30 日 - 朔策 = 0.469407 日 = 4694.07 分。

通闰 = 岁实 - 12 × 朔策 = 10.875384 日。

气策 = 岁实 / 24 = 15.2184375 日。

气盈 = 气策 - 15 = 0.2184375 日 = 2184.375 分。

没限 = 日周分 - 气盈分 = 7815.625 分 = 0.7815625 日。

周天分 3652575 分。

周天度 365.2575 度。

半周天 = 周天度 / 2 = 182.62875 度。

周天象限 = 周天度 / 4 = 91.314375 度。

岁差 = 周天 - 岁周 = 365.2575 - 365.2425 = 0.0150 = 1 分 50 秒。

盈初缩末限 88.909225 日；冬至至春正 88.909225 日称盈初限，秋正至冬至 88.909225 日谓缩末限。这两限内太阳皆行象限度。

缩初盈末限 93.712025 日；春正至夏至，夏至到秋分各 93.712025 日，分别称盈末限、缩初限。在此期间太阳亦皆行象限度。

转终=近点月=27.5546 日=275546 分。

转中=转终/2=13.7773 日。

转差=朔实-转终=1.975993 日。

月平行度=13.36875 度。

纪法 60。

限法 820。

周限=转终分/限法 $\approx$ 336。

中限=周限/2=168。

初限=周限/4=84。

上弦 91.314375 度。

望 182.62875 度。

下弦 273.943125 度。

气应 55.0600 日:实测得出至元辛巳(1281)岁前冬至为己未日子正夜半后 6 刻,距甲子日子正夜半为 55.0600 日。

闰应 20.2050 日:实测计算得出至元辛巳岁前冬至距天正月平朔时刻为 20.1850 日。至元三十一年(1294)改定为 20.2050 日。

转应 13.0205 日:测算得出至元辛巳岁前冬至距其前月过近地点 13.1904 日。至元三十一年改定为 13.0205 日。

交应 26.0388 日:测算得出至元辛巳岁前冬至距其前月过降交点 26.018786 日。至元三十一年改定为 26.0388 日。

周应 315.1075 度:授时历规定太阳所在赤道宿度的起算点为虚宿 6 度。实测得出至元辛巳岁前冬至加时太阳在赤道箕宿 10 度。由授时历二十八宿赤道宿度,虚 6 度至箕 10 度积 315.1075 度。

## (二)气朔闰的推步方法

授时历书中历日依据定朔确定,而二十四节气采用平气注

历。因此,闰月、月大小、日躔过宫等都要结合考查定朔时分来判定。

推天正冬至:

所求年距元年数=所求年一至元辛巳(1281)

中积=距元实足年数 $\times$ 岁实

通积=中积+气应 55.0600

所求年年前冬至= $[\text{通积}/\text{纪法 } 60]_R$ 。通积用纪法 60 去之,不尽,所得余数(日及小数),其日命甲子算外(1 日为乙丑,2 日为丙寅……),即为所求年年前冬至日辰及分。

将所得天正冬至日分,以气策 15.2184375 累加之,日数满纪法 60 去之,得各气日辰及分秒。如元至正二十五年(1365),距元 84,中积日 30680.3700,通积 30735.4300,得天正冬至 15.4300,为己卯日 43 刻。累加气策,得年内各气如表 10-18 所示。

表 10-18 至正二十五年二十四气大小余

冬至 15.4300	小寒 30.6484	大寒 45.8669	立春 1.0853
雨水 16.3037	惊蛰 31.5222	春分 46.7406	清明 1.9591
谷雨 17.1775	立夏 32.3959	小满 47.6144	芒种 2.8328
夏至 18.0572	小暑 33.2697	大暑 48.4881	立秋 3.7066
处暑 18.9250	白露 34.1434	秋分 49.3619	寒露 4.5803
霜降 19.7987	立冬 35.0172	小雪 50.2356	大雪 5.4541
冬至 20.6725	小寒 35.8909	大寒 51.1094	立春 6.3278

定朔推步程序如下。

1. 推天正经朔及各月平朔

闰积=中积+闰应 20.2050

闰余= $[\text{闰积}/\text{朔实}]_R$

闰积满朔实,去之,不尽,所余为闰余,即冬至平月龄,冬至距经朔的日数及分。

天正经朔日分=冬至日分-闰余

天正经朔日分累加朔实,满纪法去之,得各月经朔。

## 2. 推天正及各月经朔入盈缩历

冬至后为盈历,夏至后为缩历。即其盈缩可由各经朔日辰在冬至、夏至前后位置判定。天正经朔总在冬至前,将半岁周(182.62125),以闰余日分减之,即得天正经朔入缩历。依次递加朔实,满半岁周去之,得各月入盈缩历。

## 3. 求盈缩差(太阳运动中心差改正)

视各经朔入历,盈历在盈初缩末限 88.909225 下,为初限  $x$ ,以上,反减半岁周 182.62125,余为末限  $x$ ;缩历,在缩初盈末限 93.712025 下,为初限  $x$ ,以上,反减半岁周,余为末限  $x$ 。

盈初缩末历计算公式:

$$\text{盈缩差} = [5133200 - (31 \times x + 24600) \times x] \times x \times 10^{-8} \text{度}$$

缩初盈末历计算公式:

$$\text{盈缩差} = [4870600 - (27 \times x + 22100) \times x] \times x \times 10^{-8} \text{度}$$

也可采用“太阳盈初缩末限立成”、“太阳缩初盈末限立成”得出。

## 4. 推天正及各月经朔入转

天正经朔入转日分

$$= [(中积 + 转应 13.0205 - 闰余) / 转终 27.5546]_R$$

天正经朔入转日分依次累加转差 1.975993 日,满转终 27.5546 日去之,得各月入转日分。入转日分即距其前近地点的日及小数。

## 5. 求天正及各月经朔入迟疾历

天正及各月经朔入转日分在转中 13.7773 以下,为疾历;以上,减去转中,为迟历。

## 6. 求迟疾差(月亮运动改正)

将迟疾历日分,以 12.20 限乘之,得数在初限 84 以下为初限

$x$ ;以上,反减中限 168,所余为末限  $x$ 。计算迟疾差公式:

$$\text{迟疾差} = [11110000 - (325 \times x + 28100) \times x] \times x \times 10^{-8} \text{度}$$

### 7. 求加减差及各月定朔

所得盈缩差、迟疾差,同名相加,异名相减(盈迟、缩疾为同名,盈疾、缩迟为异名)。以限法 820 乘之。以所入迟疾限下行度除之,即为加减差。以得数加减各月经朔即得定朔日分。盈迟为加,缩疾为减。

$$\text{迟疾限下行度} = \text{月平行度} \pm \text{该限损益分}$$

损减益加。损益分即“太阴迟疾立成”中的一差(损益分)。损益分益加损减月平行度,即得出疾历行度或迟历行度。

各月经朔以弦策累加之,得各月经弦望,用上述相同步法求出加减差,可得各月定弦望。

置闰和闰月的位置:

月内无中气者,为闰月。闰月的位置由闰余确定。

闰余为冬至的月龄,即冬至距合朔的日分。回归年比 12 朔望月长 10.875384 日,称岁(通)闰。

$$\text{闰准} = \text{朔实} - \text{岁闰} = 18.655209 \text{ 日}$$

$$\text{月闰} = \text{岁闰} / 12$$

$$= 2 \times \text{气策} - \text{朔实}$$

$$= 0.906282 \text{ 日}$$

当某年闰余大于闰准时,这年就为闰年 13 月。将天正冬至闰余分按月累加月闰 0.906282 日,加到某月,其值大于朔实时,该月即为闰月。

如万历五年(1577),距元 296 年。闰余 20.4840,大于闰准 18.655209,是年有闰。应闰何月呢?将闰余按月递加月闰 0.906282 日,得十二月 21.3923,正月 22.2966,二月 23.2029,三月 24.1091,四月 25.0154,五月 25.9217,六月 26.8280,七月

27.7343, 八月 28.6406, 九月 29.5468。九月其和大于朔实 29.530593, 故此月为闰月。该年应闰八月。

由此看出, 根据闰余、闰准, 可以很简单地判定何年应该置闰以及闰月的位置。而不必排查何月没有中气。授时历由于采用定朔平气注历。有时置闰以及闰月位置需考查定朔时分才能最终判定。

现以元至正二十五年(1365)为例。这年天正经朔日分为 57.1411, 闰余 18.28889 小于闰准。是年(自天正至次年天正月)似当不闰。但经计算, 天正定朔为  $57.1411 - 0.4697 = 56.6714$  日, 有减差 0.4697 日。这样, 冬至到天正定朔时距(真月龄), 即定闰余为 18.7586 ( $18.28889 + 0.4697$ ) 大于闰准。根据定朔, 当是闰年。依次累加月闰, 得出是年当闰十月。

### (三) 元至正二十五年(1365)定朔推步实例

距元 84, 中积 30680.3700, 通积 30735.4300, 天正冬至 15.4300。

$$\text{闰余} = [(\text{中积} + \text{闰应}) / \text{朔实}]_R = 18.28889$$

$$\text{天正经朔} = \text{冬至日分} - \text{闰余}$$

$$= 75.4300 - 18.2889$$

$$= 57.1411$$

各月定朔计算列于表 10-19 中。

为节省篇幅, 表中八到十二月只列出结果。

授时历计算得出的是元大都(北京)视时。实朔是用现代天文方法计算得到的东 8 时区区时, 即通常说的“北京时间”。它是东经  $120^\circ$  的地方平时。它们之间的关系如下:

$$\text{视时} = \text{北京时间} - (8^h - 7^h.76) - \text{均时差 } Z$$

$$= \text{北京时间} - 14^m.4 - Z$$

表 10-19 至正二十五年定期计算

	天正月	十二月	正月	二月	三月	四月	五月	六月	七月
经朔	57.14111	26.67171	56.20230	25.74289	55.26349	24.79408	54.32467	23.85526	58.38586
盈缩历	盈末	盈初	盈初	盈初	盈末	盈末	盈末	盈初	缩初
盈缩差	18.28889	11.24171	40.77230	70.30289	82.78776	53.25717	23.72658	5.80401	35.33461
迟疾历	-0.8546	0.5455	1.6630	2.2852	2.3644	1.9263	1.0276	-0.2752	-1.4332
	疾初	疾末	疾末	疾末	迟初	迟初	迟初	迟末	迟末
	6.8318	8.8078	10.7838	12.7598	0.9585	2.9345	4.9105	6.8865	8.8624
迟疾 历限	83.3480	60.5449	36.4378	12.3306	11.6934	35.8005	59.9076	83.9852	59.8781
迟疾差	-5.4261	-4.9752	-3.5199	-1.3211	1.2555	3.4682	4.9485	5.4234	4.9472
迟疾 行度	1.0965	1.0549	1.0187	0.9937	0.9929	1.0174	1.0531	1.0965	1.1394
加减差	-0.4697	0.3443	-0.1495	0.0796	0.2990	0.4348	0.4653	0.3850	0.2529
定期	庚申 16:07	庚寅 7:52	庚申 1:16	己丑 19:59	己未 13:30	己丑 5:30	戊午 18:58	戊子 5:46	丁巳 15:20
实朔	11.24, 16:37	12.24, 7:55	1:20	19:47	13:44	5:42	19:05	6:10	15:41
实一定	30 <sup>m</sup>	3 <sup>m</sup>	4 <sup>m</sup>	-12 <sup>m</sup>	14 <sup>m</sup>	12 <sup>m</sup>	7 <sup>m</sup>	24 <sup>m</sup>	21 <sup>m</sup>
	八月	九月	十月	闰十月	十一月	十二月			
定期	丁亥 0:11	丙辰 8:51	乙酉 17:50	乙卯 4:09	甲申 16:18	甲寅 6:16			
实朔	0:30	9:13	18:25	4:37	16:22	6:00			
实一定	19 <sup>m</sup>	22 <sup>m</sup>	35 <sup>m</sup>	28 <sup>m</sup>	4 <sup>m</sup>	-16 <sup>m</sup>			



式中,

均时差  $Z = \text{平时} - \text{视时}$

将实朔化为元大都视时后,比较看出,授时历计算得出的定朔,与视时平均约有  $2^m.5$  的误差(天正月至闰十月)。其中最大误差为 40 分钟。

## 二、步日躔与太阳过宫

授时历步日躔包括三方面的计算:①根据太阳入历,推出太阳运动的盈缩差;②求四正及每日太阳黄道、赤道位置;③计算太阳入十二次即太阳过宫的时刻。

前面介绍了计算太阳盈缩差的方法和算式。授时历计算太阳过宫、入十二次时刻的方法比较巧妙。有些类似现今天文年历由太阳黄经逆内插求各节气时刻的做法。推算步骤较多且比较复杂。

953

### (一)推日躔黄道入十二次时刻及太阳位置

#### 1. 推天正冬至赤道黄道日度

通积 = 中积 + 周应 315.1075

通积,满周天度去之,不尽,所余度数,命起赤道虚宿 6 度外,去之,至不满宿,即得天正冬至加时日躔赤道宿度及分秒。虚 6 度到尾末共 305.1075 度。故授时历测定的周应 315.1075 度,即为元至元十八年辛巳岁前冬至日太阳位于箕宿 10 度。因为尾宿之后就是箕宿,所以有:

天正冬至日躔赤道箕宿度分

$$= \left[ \frac{\text{中积} + \text{周应}}{\text{周天度 } 365.2575} \right]_R - 305.1075 \text{ 度}$$

冬至加时赤道日度,以“黄赤道率”立成表中,与之相应的(略小)至后赤道积度减之,所余以黄道率乘之,再以赤道率除之,得

数,加对应的立成中黄道积度,即所求年天正冬至加时黄道日度及分秒。即根据得出的冬至赤道日度,查“黄赤道率”立成表。由冬至赤道日度,线性内插得到对应的黄道日度。

## 2. 求四正加时黄道日度

黄赤道差=冬至赤道日度-冬至黄道日度

四正定象度=(本年黄赤道差-一次年黄赤道差)/4  
+气象限(岁周/4)

春正定气=天正冬至日分+盈初缩末限岁前冬至日分  
即为冬至定气

夏正定气=春正定气+缩初盈末限

春正定气过纪法 60 去之。冬夏二至为盈缩之端,故即以冬至、夏至恒气(平气)作为定气。

秋正定气=夏至日分(即定气)+缩初盈末限

次年冬至定气=秋正定气+盈初缩末限

四正定气皆去纪法,其值在 60 以内。四正定气日分亦可由下式得出:

四正定气日分=四正恒气日分±盈缩差  
(盈缩差命为日分,盈加缩减)

四正相距日

=次正定气大余+60-前正定气大余

=四正定气日距后正定气日的日数

四正加时黄道积度

=冬至加时黄道日度+ $n \times$ 四正定象度

$n=0,1,2,3,4$ 。 $n=4$ 为次年冬至黄道日度。四正黄道积度,满黄道宿次去之,各得四正定气加时黄道度分,即四正加时黄道日度。

## 3. 求四正及每日夜半黄道日度

四正加时减分=四正定气小余 $\times$ 其日行度

四正夜半积度 = 四正加时黄道积度 - 四正加时减分  
 冬至日行 1.051085 度。春正距夏至 93 日者，日行 0.999703 度；  
 距 94 日者行 1 度。夏至日行 0.951516 度。秋正距冬至 88 日者，  
 行 1.000505 度；距 89 日者行 1 度。四正黄道夜半积度，满黄道宿  
 度去之，即得四正夜半黄道宿度。

四正夜半相距度  
 = 次正夜半黄道积度 - 前正夜半黄道积度  
 = 前后二正定气夜半日度之差

四正行度加减日差  
 = (相距度 - 累计相距日之行定度) / 相距日  
 = (相距度 - 相距日下行积度) / 相距日

相距度多者，即从相距度内减去行积度者为加；相距度少者，即从  
 行积度内减去相距度者为减。

秋正距冬至、冬至距春正 88 日，行积度为 90.4009 度；89 日  
 者行积度为 91.4014 度。春正距夏至、夏至距秋正 93 日者，行积  
 度 90.5990 度；94 日行积度 91.5987 度。

每日行定度 = 四正后每日行度 ± 日差

每日行度 = 日平行 1 度 ± 该日损益分

也可由立成查出。

置四正夜半日度，以行定度每日加之，满黄道宿度去之，即得  
 每日子正夜半日度。

#### 4. 推日躔黄道入十二次时刻

由四正夜半日度及每日子正夜半黄道日度，可以根据黄道十  
 二次宿度判定何日为入次日。入次日子正黄道日度略小于十二  
 次宿度，其明日子正夜半日度略大于所入次宿度。

入次时刻(日的小数)

$$= \frac{(\text{入次宿度} - \text{入次日子正夜半日度})}{\text{其日行定度}}$$

其日行定度可由立成查出,即为日平行1度士该日损益分。其数值亦等于入次日夜半日度与明日夜半日度相减之余。由日的小数可化为时分秒或时辰刻分数。

## (二)黄赤道宿度积度钐和黄道十二次宿度

### 1. 赤道宿度

角 12.10	亢 9.20	氏 16.30	房 5.60
心 6.50	尾 19.10	箕 10.40	斗 25.20
牛 7.20	女 11.35	虚 8.9575	危 15.40
室 17.10	壁 8.60	奎 16.60	娄 11.80
胃 15.60	昂 11.30	毕 17.40	觜 0.05
参 11.10	井 33.30	鬼 2.20	柳 13.30
星 6.30	张 17.25	翼 18.75	轸 17.30

### 2. 黄道宿度

角 12.87	亢 9.56	氏 16.40	房 5.48
心 6.27	尾 17.95	箕 9.59	斗 23.47
牛 6.90	女 11.12	虚 9.0075	危 15.95
室 18.32	壁 9.34	奎 17.87	娄 12.36
胃 15.81	昂 11.08	毕 16.50	觜 0.05
参 10.28	井 31.03	鬼 2.11	柳 13.00
星 6.31	张 17.79	翼 20.09	轸 18.75

### 3. 黄道积度钐

箕 9.59	斗 33.06	牛 39.96	女 51.08
虚 60.0875	危 76.0375	室 94.3575	壁 103.6975
奎 121.5675	娄 133.9275	胃 149.7375	昂 160.8175
毕 177.3175	觜 177.3675	参 187.6475	井 218.6775
鬼 220.7875	柳 233.7875	星 240.0975	张 257.8875
翼 277.9775	轸 296.7275	角 309.5975	亢 319.1575

氐 335.7775    房 341.0375    心 347.3075    尾 365.2575

#### 4. 赤道积度铃

箕 10.40	斗 35.60	牛 42.80	女 54.15
虚 63.1075	危 78.5075	室 95.6075	壁 104.2075
奎 120.8075	娄 132.6075	胃 148.2075	昂 159.5075
毕 176.9075	觜 176.9575	参 188.0575	井 211.3575
鬼 223.5575	柳 236.8575	星 243.1575	张 260.4075
翼 279.1575	轸 296.4575	角 308.5575	亢 317.7575
氐 334.0575	房 339.6575	心 346.1575	尾 365.2575

#### 5. 黄道十二次宿度

危 12.6491 度	入娵觜次	辰在亥
奎 1.7363 度	入降娄次	辰在戌
胃 3.7456 度	入大梁次	辰在酉
毕 6.8805 度	入实沈次	辰在申
井 8.3494 度	入鹑首次	辰在未
柳 3.8680 度	入鹑火次	辰在午
张 15.2606 度	入鹑尾次	辰在巳
轸 10.0797 度	入寿星次	辰在辰
氐 1.1452 度	入大火次	辰在卯
尾 3.0115 度	入析木次	辰在寅
斗 3.7685 度	入星纪次	辰在丑
女 2.0638 度	入玄枵次	辰在子

### (三)出土授时历历书残页和传世大统历书中日躔黄道入十二次时刻记载及其计算

在内蒙古黑城出土有元授时历书残页五种。中国古历有很多传世,考古发掘和敦煌发现的也不少。但元代历书始终未见。元授时历书残页的出土使我们得见元代历书的内容和形式,并使得授时历推步的一些问题得到解决。我们根据残历的历日和历注记载,考订确认了这五种残历的年代。

五件残历中,有三件保存有日躔十二次的日期时刻。历书一,笔者考证系至正十年的历书,记有“(五月)十五日戊辰酉正二刻[后日躔鹑首之次]”;历书二,我们认证是至正二十五年,残历记载,“(七月)一日丁巳午初初刻[日躔鹑火之次]”;历书三,考订为大德十一年,记有,“(正月)十二日丁丑[□□□□后日躔娵訾之次]。”

清时宪历,采用西洋之法,以中气为日躔入十二宫时刻,如日躔冬至即入星纪丑宫之类。在《大清乾隆六十年岁次乙卯时宪书》中,正月月首注记“二十九日壬子亥正一刻后日躔娵訾之次”。二十九日壬子亥正一刻就是交雨水正月中气的时刻。《大清同治十三年岁次甲戌时宪书》四月月首记载,“六日戊寅未正三刻后日躔实沈之次”,此即四月交小满中气的时刻。因此,历书推步中,求出二十四节气的时刻,即知日躔入十二次及在十二次中的时刻和位置。

中国古历十二次大抵皆依星宿而定,如奎娄为降娄,心为大火,朱鸟七宿为鹑首、鹑火、鹑尾,等等。故宫有一定之宿,宿有常居之宫,由来尚矣。唐以后历法始用岁差,然亦天自为天,岁自为岁,宫与星仍旧不易。十二次沿恒星天进行分划、测定;而二十四气则由岁实(回归年)二十四等分而得。由于岁差的原因,春分

点、冬至点在星空的位置不断西移。至迟在西汉三统历时期,十二次已是均匀划分,并用它描述太阳运动,与二十四气联系了起来。十二次与二十四气的关系为:“日至其初为节,至其中为中,斗建下为十二辰,视其建而知其次。”由于汉人不识岁差,又以赤道测定;历代拘泥于宫星不易,观点、方法各异,测定结果不一;并未能按春分点、冬至点位置变化,及时调整十二次的星宿位置、关系。所以三统历以后,直到授时历、大统历,古历二十四气与十二次并未保持固定的对应关系。历书中日躔十二次日期时刻既非交中气的时刻,也不是交节气的日子。故授时历步日躔术专门介绍计算太阳过宫的方法。

我们依据元史历志步日躔术,计算了黑城授时残历大德十一年(1307)正月、至正十年(1350)五月、至正二十五年(1365)七月及万历五年(1577)日躔嫩訾、玄枵次的时刻。所得结果与残历及传世明万历历书记载完全一致。以此为例来介绍具体的推步过程。计算步骤、结果列于表 10-20。

## 第六节 步月离、定差距差定限度

### 一、推定朔弦望加时日月宿度

如经朔盈缩历,在盈历,入盈历日及分即为经朔加时中积;如在缩历,入缩历日及分加半岁周为中积。

定朔弦望入历

= 经朔弦望入盈缩历日分士加减差

定朔弦望入历,如在盈历,入盈历日分即为定朔弦望中积;如在缩历,入缩历日分加半岁周为中积。以盈缩历日分计算盈缩差,并命日为度,则有:

加时定积度 = 定朔弦望加时中积士盈缩差

表 10-20 授时、大统历书日躔计算

	大德十一年 正月	至正十年 五月	至正二十五年 七月	万历五年 正月	万历五年 十二月
年前冬至	11.3650	57.7925	15.4300	46.8400	46.8400
赤道日度	箕 9.6100	箕 8.9650	箕 8.7400	箕 5.5600	箕 5.5600
黄道日度	箕 8.8608	箕 8.2642	箕 8.0561	箕 5.1204	箕 5.1204
四正定气	冬至 11.3650	夏至 59.4137	夏至 18.0512	冬至 46.8400	年终冬至 52.0825
四正相距日	冬至距春正 89 日	夏至距秋正 94 日	夏至距秋正 94 日	冬至距春正 89 日	冬至距春正 89 日
四正黄道日度	8.8608	190.8861	190.6780	5.1204	5.1066
四正加时减分	0.38365	0.39364	0.04872	0.88290	0.08660
四正夜半日度	8.4772	190.4925	190.6293	4.2375	5.0200
相距度	91.4204	91.5787	90.5960	91.4448	90.4061
日 差	+0.0002124	-0.0002130	-0.0000323	+0.0004883	+0.0000593
四正夜半日度	8.4772	190.4925	190.6293	4.2375	5.0200
盈缩积度	64.1631	4.7620	33.5776	68.2272	36.4820
日差积	62×0.000212	-5×0.000213	-35×0.0000323	66×0.0004883	35×0.0000593



续表

	大德十一年 正月	至正十年 五月	至正二十五年 七月	万历五年 正月	万历五年 十二月
三项和	72.6534	195.2534	224.2058	72.4969	41.5041
减交宫积钐	虚 60.0875	参 187.6475	鬼 220.7875	虚 60.0875	牛 39.9600
入宫夜半日度	亥宫危 12.5659	未宫井 7.6059	午宫柳 3.4183	亥宫危 12.4094	子宫女 1.5441
十二次交宫界	危 12.6491	井 8.3494	柳 3.8680	危 12.6491	女 2.0638
差	0.0832	0.7435	0.4497	0.2397	0.5197
日下太阳行度	1.0170	0.9538	0.9680	1.0145	1.0327
商	0.0818 日	0.7795 日	0.4646 日	0.2363 日	0.5033 日
入宫时分	1.57.8	18.42.5	11.09	5.40	12.04.7
	11+62=73	59+5=64	18+35=53	46+66=112	52+35=87
日辰时刻	丁丑日丑初四刻	戊辰日酉正二刻	丁巳日午初初刻	丙辰日卯初二刻	辛卯日午正初刻
日躔	亥宫殿管	未宫转首	午宫转火	亥宫殿管	子宫玄枵

以冬至加时日躔黄道宿度(冬至黄道日度)与加时定积度相加,各得定朔、弦望加时日度。

合朔时,日月同度。所以定朔时日度便是定朔加时月度。两弦时日月黄道经度相差周天象限度,望时日月相距半周天度。所以有:

定弦望月行定积度=弦望度+定积度

同样,以冬至加时日躔黄道宿度与定弦望月行定积度相加,各得定弦、定望加时黄道月度。

## 二、推定朔弦望加时赤道月度

朔弦望入盈缩历日是以冬至夏至为始点。定积度为距冬至加时黄道积度。这一步就是将黄道积度化为赤道积度。可根据弧矢割圆法进行计算,也可用“黄赤道率”立成用线性内插求得。

取定朔弦望加时黄道月行定积度,满象限去之,以立成表列相应黄道积度减之,余数以赤道率乘之,黄道率除之,用同行赤道积度及所去象限相加,得定朔弦望赤道加时定积度。与冬至加时赤道日度相加,各为定朔、弦、望加时赤道月度及分秒。

查表时要注意,象限以下以及半周以上,去之,为至后;过象限及3象,去之,为分后。

## 三、求正交日辰

置中积,加交应 26.0388,减闰余,得数满交终 27.212224,累去之,所余为天正经朔交泛。即

$$\text{天正经朔交泛分} = \left[ \frac{\text{中积分} + \text{交应} - \text{闰余分}}{\text{交终}} \right]_R$$

天正经朔后平交日=交终日-天正经朔交泛

如推次月,累减交差日 2.318369 日,得次月朔后平交日。交泛日分即经朔入交日及分。故

朔后平交日 = 交终日分 - 经朔入交日及分

如朔后平交日，不够减交差者，加交终减之，其交仍在本月，为重交月朔后平交日。每岁必有重交之月。

朔后平交入转 = 经朔入转 + 朔后平交日

在转中以下为疾历；以上，减去转中为迟历。如推次月，累减交转差 0.342376 日（朔交差 2.318369 - 朔转差 1.975993），即得。如不及减，加转中减之。

置平交入转迟疾历，按步气朔内，推迟疾限及迟疾差，为平交入限迟疾差。

$$\text{平交加减退差} = \frac{\text{平交入限迟疾差} \times \text{日率 } 820}{\text{所入迟疾限下行度}}$$

迟历为加，疾历为减。

正交日辰 = (经朔 + 朔后平交日) ± 平交定差

其日命甲子算外，即得正交日辰。如推次月，累加交终，满纪法去之。如遇重交月，再加交终。

#### 四、推正交距冬至加时黄道积度及宿次

距后度 = 朔后平交日 × 月平行度 13.36875

各月正交距冬至加时黄道积度 = 经朔加时中积 + 距后度  
加冬至加时黄道日度，以黄道积度钤减之，至不满宿次，即得正交月离——正交加时月离黄道宿度及分秒。

如推次月，累减月平交朔差 1.463102 度（天周 365.2575 - 交终度 363.7934196）。遇重交月，同次朔。

#### 五、求定差距差及月离赤道正交宿度

正交距冬至加时黄道积度，在半岁周以下，为冬至后；以上，减去半岁周，余为夏至后。在冬夏二至后的度分，在气象限以下，为初限；以上，用减半岁周，为末限。

推次月，若本月初限，则累减月平交朔差，余为次月初限；不及减者，反减月平交朔差，余为次月末限。若本月末限，则累加月平交朔差，为次月末限，至满气象限。以减半岁周，余为次月初限。

$$\text{定差度} = \frac{\text{极差 } 14.66 \text{ 度} \times \text{初末限}}{\text{象限 } 91.314375}$$

$$\text{距差度} = \text{极差 } 14.66 \text{ 度} - \text{定差度}$$

$$\text{定限度} = 98 \text{ 度} \pm 24 \times \text{定差} / 14.66 \text{ 度}$$

正交在冬至后为减，夏至后为加。距差为任意时刻白道与赤道交点距二分点的度数。当月球轨道的升(降)交点正好位于冬至(夏至)点时，那时赤白交点离二分点的弧距(距差)最大，为14.66度，称作极差。其他时候，白赤交点离二分点的距差都小于极差14.66度，其差值就是定差度。

取冬至赤道日度，累加气象限度，各得春分、夏至、秋分积度。根据赤道积度钤，满赤道宿次去之，得四正赤道宿度及分秒。

$$\text{月离赤道正交宿度} = \text{春秋二正赤道宿度} \pm \text{距差}$$

正交在冬至后，取春正赤道积度±距差，初限加、末限减；正交在夏至后，置秋正赤道积度±距差，初限减、末限加。得数，满赤道积度钤去之，即为月离赤道正交宿度。

## 六、求月离赤道正交后半交白道出入赤道内外度(白道赤道交角)

$$\text{正交后赤道积度} = \text{春秋二正赤道所当宿度全度}$$

$$- \text{一月离赤道正交宿度}$$

《明史·历志》与此类似，记载为：

$$\text{正交后赤道积度} = \text{白赤正交所入某宿赤道全度}$$

$$- \text{一月道与赤道正交宿度}$$

正交后积度，以赤道各宿全度累加之，满气象限去之，为半交

后;又去之,为中交后;再满去之,为半交后。根据各交积度,在半象限以下为初限;以上,用减象限,所余为末限。

月离赤道后半交白道出入赤道内外度(白赤交角) $=23.90$ 度 $\pm 25 \times$ 各交定差度分/61。月离黄道正交在冬至后宿度为减,夏至后宿度为加。月离赤道正交后为外,中交后为内。

知道了白赤交角及每日月离赤道交后初末限,就可求出每日月离白道去极度分。进而可求每交月离白道积度及宿次,定朔弦望加时月离白道宿度。由定弦朔望加时及夜半晨昏入转,可得夜半、晨昏月度及每日晨昏月离白道宿次。

## 第七节 步交会术、日月食推步

### 一、步交食

#### (一)基本法数和用数

交终日 27.212224。

交终日(分)272122.24。

交中日 13.606112。

交终度 363.7934度。

交中度 181.8967度。

交望 14.7652965日。

正交度 357.64度。

中交度 188.05度。

交差 2.318369日。

交应 26.0388日。

前准 166.3968度。

后准 15.50 度。

日食阳历限 6 度。

定法 60。

日食阴历限 8 度。

定法 80。

月食限 13.05 度。

定法 87。

阳食限：如定朔入交小于 0.60 日，大于 25.60 日，或在 13.10 日～15.20 日之间者，皆入食限。

阴食限：如定望入交，小于 1.20 日，大于 26.05 日，或在 12.40～14.80 日之间，皆入食限。

又，若定朔小余在日出前或日入后 0.082 日以上者，日食在夜；定望小余在日入前、日出后 0.082 日以上者，月食在昼。皆不必入算。

步交食用数：经朔望，盈缩历，盈缩差，迟疾历，迟疾差，加減差，定朔望，日出分，日入分，半昼分，入交泛分，岁前冬至加时黄道日度宿次。

日出分 = 晨分 + 250 分

日入分 = 昏分 - 250 分

半昼分 = 日入分 - 5000 分 = 昏分 - 5250 分

日周 100 刻 10000 分。

月平行度 13.36875 度。

日率分 8.20 分，1 限 0.082 日，1 日 12.20 限。

定入迟疾历 = 经朔望入迟疾历 ± 加減差

迟疾定限 = 定入迟疾历 × 日转限 12.20

定限行度 = 疾迟行度 - 率法(日行分)8.20 分

定日月食限：

阳历入交:0.579592日,以下,日月皆食,以上,月食,日不食;  
大于26.05304日,日月皆食;在13.0265至14.7653日之间,日月  
皆食;在12.446928日至13.0265日之间,月食。

阴历入交:在1.159184日以上,日月皆不食,以下,月食,日  
不食;大于26.05304日,日月皆食;12.44至13.0265日,月食;  
13.0265至14.7653日,日月皆食。

又,定朔小余小于0.125日或大于0.875日,日不食;定望小  
余在0.30至0.70日之间月不食。

## (二)日月食推步方法

### 1. 求定朔望加时入交

天正经朔入交泛日

$$=[\text{中积日} + \text{交应 } 26.0388 - \text{闰余} / \text{交终 } 27.212224]_R$$

次朔望入交泛日

$$=[\text{天正经朔入交泛日} + n \times \text{交望日} / \text{交终日}]_R$$

式中  $n$  为不大于24的整数。

食月入交泛日  $=[\text{天正经朔望入交泛日}$

$$+ \text{交差} \times \text{所距月数} / \text{交终日}]_R$$

经朔望夜半入交 = 各经朔望入交泛日 - 经朔望小余

得数,大月加2日,小月加1日,余再加0.787776日,即为次朔夜  
半入交。累加1日,满交终日(27.212224日)去之,即每日夜半入  
交泛日。大月30日,小月29日,内减交终27.212224日,为  
2.787776日或1.787776日。

定朔望加时入交 = 经朔望入交泛日  $\pm$  定朔望加减差。

### 2. 求日月食甚定分(辰刻)

交常度 = 有食之经朔望入交泛日分  $\times$  月平行度。

交定度 = 交常度  $\pm$  朔望下盈缩差。盈加、缩减。不及减者,

加交终减之。

日食正交中交限度：交定度小于 7 度，大于 342 度，食在正交；交定度在 175 度至 202 度之间，食在正交。不在限内不食。

中前分 = 半日周 5000 分 - 定朔小余分。中前 = 半日 (0.50) - 定朔小余。定朔小余不足半日周时用此式，在半日以上时用：

中后分 = 定朔小余分 - 半日周 5000 分。

中后 = 定朔小余 - 半日。

定望分小于 2500 分时，卯前分 = 定望小余分。

定望分在 2500 分以上，不足半日周时，卯后分 = 半日周 - 定望小余分。

定望分不足 7500，用酉前分；以上，用酉后分。

酉前分 = 定望小余分 - 半日周。

酉后分 = 日周 10000 分 - 定望小余分。

时差分 = (半日周 5000 分 - 中前中后分) × 中前中后分 / 9600。时差日 = (半日 - 中前中后) × 中前中后 / 0.96。中前为减，中后为加。月食时差分 = (卯酉前后分)<sup>2</sup> / 47800。月食时差(日) = (卯酉前后)<sup>2</sup> / 4.78。子前为减，子后为加。大统历不用月食时差分。

日食食甚定分 = 定朔小余分 ± 时差分。月食食甚定分 = 定望小余分 ± 时差分。日食中前为减，中后为加；月食子前为减，子后为加。食甚定分化为时刻，即食甚辰刻。大统历即以定望分为食甚分。

日食距午定分 = 中前中后分 ± 时差分。

### 3. 求日月食甚入盈缩历及日行定度

日月食甚入盈缩历日分 = 经朔望入盈缩历日分 + 食甚日(定朔望大余) + 食甚定分 - 经朔望日分(经朔望大小余)。

食甚入盈缩历定度 = 食甚入盈缩历日分 ± 盈缩差。盈加



缩减。

盈缩差可根据前述日躔盈缩差算式,直接计算得出。也可由“太阳盈初缩末限立成”、“太阳缩初盈末限立成”,查出食甚入盈缩历日条下“盈缩加分”、“盈缩积度”,线性内插得出。

盈缩差=食甚入盈缩历小余(小数部分,即食甚入盈缩历日大小余—食甚入盈缩历大余)×盈缩加分+盈缩积度。

#### 4. 求日食南北差、东西差、正交中交限度

食甚入盈缩历定度不足象限 91.310625,为初限;大于象限,则用减半岁周 182.62125 为末限。

南北泛差=4.46—(初末限度)<sup>2</sup>/1870。

南北定差=南北泛差—南北泛差×距午分/半昼分。如泛差不及减者,则反减之。

盈初缩末历食在正交为减,中交为加;缩初盈末历,食在正交为加,中交为减。如系泛差反减而得者,则其加减反是。

半昼分可由“食甚入盈缩历定度初末限”,查“黄道出入赤道内外去极度及半昼夜分”(《元史·历志·授时历经》),或“黄道每度昼夜刻立成”(《明史·历志·大统历法·法原》)得出。需要注意的是,这两个表所载的昼夜刻分,乃元大都(北京)晷漏时分。也可由“日月食甚入盈缩历日分”,查《明史·历志·大统历法立成》所载“冬夏二至后晨昏分立成”(只载冬夏至后积日、晨分、昏分)得出。另《古今律历考》卷四十六“历法刻漏”(大统)立成表中,也刊有“冬夏至后积日、晨分、日出分、半昼分、日入分及昏分”等数值。要记住的是,这两个表所载乃南京应天府的晷刻时分。

对于南京、北京以外地区,要计算准确的日出入时刻和昼夜刻分,可以根据本章第十节步中星中介绍的“句股测望”、“里差刻漏和求黄道每度昼夜刻”方法计算并编制立成表。

东西泛差=(半岁周 182.62125—食甚入盈缩历定度)×食甚

入盈缩历定度/1870。

东西定差 = 东西泛差  $\times$  距午分/2500。得数若大于东西泛差, 则, 东西定差 =  $2 \times$  东西泛差 - 东西泛差  $\times$  距午分/2500。盈历中前、缩历中后者, 正交减, 中交加; 盈历中后、缩历中前者, 正交加, 中交减。倍泛差减之者, 加减不变。

换言之, 即盈历, 中前者, 交前阴历减, 阳历加; 交后阴历加, 阳历减; 中后者, 交前阴历加, 阳历减; 交后阴历减, 阳历加。

缩历, 中前者, 交前阴历加, 阳历减; 交后阴历减, 阳历加; 中后者, 交前阴历减, 阳历加; 交后阴历加, 阳历减。

日食正交、中交定限度分 = 正交(357.64)、中交度(188.05)  $\pm$  南北定差  $\pm$  东西定差。

#### 5. 求日月食入阴阳历去交前后度

日食交定度在中交定限度以下, 阳历交前度 = 中交定限度 - 交定度。交定度在中交定限度以上, 阴历交后度 = 交定度 - 中交定限度。交定度在正交定限度以下, 阴历交前度 = 正交定限度 - 交定度。交定度在正交定限度以上, 阳历交后度 = 交定度 - 正交定限度。交定度若小于 7 度, 阳历交后度 = 交定度 + 交终度 - 正交正限度。

#### 月食入阴阳历度:

若交定度小于交中度 181.8967 度, 入阳历度 = 交定度。交定度大于交中度, 入阴历度 = 交定度 - 交中度。

#### 月食交前交后度:

若入阴阳历小于后准 15.5 度, 交后度 = 入阴阳历度。如入阴阳历度大于前准 166.3968 度, 交前度 = 交中 181.8967 - 入阴阳历度。入阴阳历度若小于前准, 或大于后准, 月不食。

#### 6. 推日月食分秒

日食分秒 = (阴、阳历食限 - 阴、阳历去交前后度) / 阴、阳历

定法。不及减者,不食。阳历日食分秒 $=$ (日食阳历限 6 度—阳历交前交后度)/日食阳历定法 60。阴历日食分秒 $=$ (阴食限 8 度—阴历交前交后度)/日食阴历定法 80。

月食分秒 $=$ (月食限 13.05 度—去交前后度)/月食定法 87。不及减者,不食。

#### 7. 求日月食定用及三限五限辰刻

日食定用分 $=$  $[(20 - \text{日食分秒}) \times \text{日食分秒}]^{\frac{1}{2}} \times 5740 / \text{入定限行度}$ 。日食定用分(日分) $=$  $[(20 - \text{日食分秒}) \times \text{日食分秒}]^{\frac{1}{2}} \times 57.40 / \text{定限行度}$ 。月食定用分 $=$  $[(30 - \text{月食分秒}) \times \text{月食分秒}]^{\frac{1}{2}} \times 5740 / \text{定限行度}$ 。月食定用分(日分) $=$  $[(30 - \text{月食分秒}) \times \text{月食分秒}]^{\frac{1}{2}} \times 57.40 / \text{定限行度}$ 。月食定用分中 5740 分,大统历作 4920 分 $(6 \times 820)$ 。

日月食初亏分 $=$ 食甚定分—定用分。日月食食甚分 $=$ 食甚定分。日月食复圆分 $=$ 食甚定分+定用分。化为时分,即得日月食三限辰刻。

月全食既分 $=$ 月食分秒—10 分。月食 10 分以上者,为月全食,用初亏、食既、食甚、生光、复圆五限推算。既内分(授时历) $=$  $[(10 - \text{既分}) \times \text{既分}]^{\frac{1}{2}} \times 5740 / \text{定限行度}$ 。既内分(大统历) $=$  $[(10 - \text{既分}) \times \text{既分}]^{\frac{1}{2}} \times 4920 / \text{定限行度}$ 。既内分(古今律历考) $=$  $[(\text{既食分} 15 - \text{既分}) \times \text{既分}]^{\frac{1}{2}} \times 4920 / \text{定限行度}$ 。既外分 $=$ 月食定用分—既内分。

月食初亏分 $=$ 食甚定分—定用分 $=$ 食甚定分—既内分—既外分。食既分 $=$ 食甚定分—既内分 $=$ 初亏+既外分。食甚分 $=$ 食甚定分 $=$ 食既分+既内分。生光分 $=$ 食甚定分+既内分。复圆分 $=$ 生光分+既外分。化为时分,为月全食五限辰刻。

#### 8. 日月食起复方位

日食,食在阳历,初起西南,甚于正南,复于东南;食在阴历,

起于西北，甚于正北，复于东北；食 8 分以上，起于正西，复于正东。

月食，食在阳历，初起东北，甚于正北，复于西北；食在阴历，初起东南，甚于正南，复于西南；食 8 分以上，初起正东，复于正西。

方位皆据南子午圈而言。

#### 9. 日月带食出入所见食分

日食，初亏、食甚在日出之前，为晨刻带食；食甚、复圆在日入以后，为昏刻带食。月食，初亏、食甚在日入以前，为昏刻带食；食甚、复圆在日出之后，为晨刻带食。

带食差 = 日出入分 - 食甚分。视晨、昏，日、月食而定。不及减者，反减。

日月出入带食所见分秒 = 日月食分秒 - 带食差  $\times$  日月食分秒 / 定用分。食甚在昼，晨为渐进，昏为已退；食甚在夜，晨为已退，昏为渐进。

月全食带食出入所见之分 = 既分 - (带食差 - 既内分)  $\times$  10 / 既外分。不及减者，为月带食既出入。

#### 10. 推月食入更点

更法 =  $2 \times$  晨分 / 5。点法 = 更法 / 5 =  $2 \times$  晨分 / 25。月食五限辰刻，如在晨分以下，有更点，以上，无更点；在昏分以后，有更点，其前，无更点。

夜半前更点 = (月食三限五限 - 昏分) / 更法。夜半后更点 = (月食三限五限 + 晨分) / 更法。得数，为更数。不满更法为初更。余数，以点法收之，为点数。

#### 11. 求日月食甚黄道宿次

日食盈历定积度 = 食甚入盈缩历定度。日食缩历定积度 = 食甚入缩历定度 + 半岁周。月食盈历定积度 = 食甚入盈历定度 + 半周天。

月食缩历定积度=食甚入缩历定度-75秒。望时日月相距半周天度182.62875,与半岁周182.62125,相差75秒。授时加大统减(依日度前后)。

日食食甚黄道日度=岁前冬至加时黄道日度+定积度。满黄道宿度积度钤去之,至不满宿次,即食甚日躔黄道宿次。

月食食甚月离黄道度=岁前冬至加时黄道日度+定积度。满黄道积度钤去之,至不满宿次,即食甚月离黄道宿度。减箕,余为入斗宿度;减斗,余为入牛宿度,等等。

## 二、日月食推步实例及精度

### (一)元至元大德年间的三次日食预报和观测

《元史》记载,成宗大德三年八月己酉朔日食(1299年8月27日),“时在巳。依历,日食二分有奇。至其时不食”。六年六月癸亥朔日食(1302年6月26日),“时在戌。依历,日食五十七秒,众以涉交既浅,且复近浊,欲匿不报。独齐履谦以状闻。及其时,果食”(《元史》传五十九)。大德六年六月癸亥朔,“日有食之。太史院失于推策。诏中书议罪以闻”(《元史·成宗纪》)。

《元史·天文志》记有,元世祖至元二十九年正月甲午朔,“日食,有物渐侵入日中,不能既。日体如金环然,左右有珥,上有抱气”。这是迄今所知,中外最早的一次日环食细致的观测实录。

现以这三次日食为例,用前面介绍的授时历步日食法,推算它们发生的时间和食分,看看与元史记载的预报、观测是否一致。并与现代计算比较,讨论其精度。推步考查结果列于表10-21。

由表10-21看出,元史记载与我们用授时历日食法推步得到的加时和食分基本是一致的。大德六年六月癸亥朔日食,元史说,“依历,日食五十七秒”,计算的食分(115秒)稍大,可能与推算

表 10-21 元初三次日食的推步

	大德三年八月己酉			大德六年六月癸亥			至元二十九年正月甲午	
	1299 年	8 月 27 日	1302 年	6 月 26 日	1292 年	1 月 21 日		
距元积年	18		21		11			
中积	6574.365		7670.0925		4017.6675			
通积	6629.425		7725.1525		4072.7275			
冬至	29.4250		45.1525		52.7275			
闰余	9.2478		12.3433		21.7185			
天正经朔	20.1772		32.8092		31.0156			
盈缩历	173.3735	缩末	170.2779	缩末	160.9094	缩末		
迟疾历	6.3656	迟	10.5909	疾	13.5591	疾		
交泛	5.7978		9.9408		21.9616			
食月经朔	45.9526		59.5233		30.0768			
盈缩历	73.9063	缩初	11.7496	缩初	37.3493	盈初		
盈缩差	-2.28355	缩	-0.54133	缩	1.5579	盈		
迟疾历	10.3723	疾	10.6455	迟	3.7338	迟		
迟疾限	126.5418	疾	129.8755	迟	45.5528	迟初		
迟疾差	-3.89144	疾	3.64711	迟	4.1706			
加減差	-0.49385		0.2174		0.4556			
食月定朔	45.4587		59.7408		30.5324			
交泛	26.6632		26.1694		26.5983			

续表

	大德三年八月己酉		大德六年六月癸亥		至元二十九年正月甲午	
	1299 年	8 月 27 日	1302 年	6 月 26 日	1292 年	1 月 21 日
定人迟 疾历					4. 18943	
限					51. 1111	迟
定限行度	0. 9433		1. 0893		0. 9580	
半昼分	0. 2683		0. 3081		0. 2050	
交常度	356. 4537		349. 8522		355. 5866	
交定度	354. 1701		349. 3109		357. 1445	正交
中前中后	0. 0413	中前	0. 2408	中后	0. 0324	中后
时差	0. 01973		0. 065		0. 01578	
食甚定分	0. 4390		0. 8058		0. 54818	
距午定分	0. 0610		0. 3058		0. 0482	
食甚入 盈缩历	73. 3927	缩初	12. 0321	缩初	37. 8207	盈初
盈缩差	-2. 2775		-0. 5536		1. 57276	
食甚入盈缩 历行定度	71. 1152		11. 4785		39. 39346	
南北泛差	1. 7555		4. 3895		3. 6301	
南北定差	1. 3564		0. 0328		2. 7766	减

续表

	大德三年八月己酉		大德六年六月癸亥		至元二十九年正月甲午	
	1299 年	8 月 27 日	1302 年	6 月 26 日	1292 年	1 月 21 日
东西泛差	4.2405		1.0505		3.01724	
东西定差	1.0347		1.285	减	0.5817	加
日食入正交 中交定限度	360.0311		356.388		355.4451	
入阴阳历 去交前后度	5.861	阴历交前	7.0771	阴历交前	1.6994	阳历交后
日食分秒	0.0267	2.67 分	0.0115	1.15 分	0.07168	7.17 分
定用分	0.04139		0.02453		0.05746	
初亏	0.3976	9:32.5 巳 I 2		18:45 酉 I 3	0.4907	11:47 午 I 3
食甚	0.4390	10:32 巳 I 2		19:20 戌 I 1	0.5482	13:09 未 I 0
复圆	0.4804	11:32 午 I 2		19:56 戌 I 3	0.6056	14:32 未 I 2
食类	日环食		日偏食		日环食	
均时差	-0°.33	1 <sup>m</sup> .32	0°.64	2 <sup>m</sup> .60	3°.61	14 <sup>m</sup> .44
北京食分	0.02		0.24		0.96	
初亏	平时 视时				11:32	11:03
食甚	平时 视时	11:14	19:28	19:11	13:18	12:49
复圆	平时 视时				14:55	14:26



中取舍的位数有关。推步时取元大都半昼分。

现代计算表明,大德三年八月己酉朔日食,食分仅为 0.02,时届午初,日光正烈,目视不易觉察。所以元史上说,“至其时未食。”大德六年六月癸亥朔日食,太阳地平高度较低,大气吸收很大,食分 2 分有奇,日食清晰可见。匿而不报,显然不妥。故“诏中书议罪”。

大德三年(1299)、六年(1302)距授时历元至元辛巳(1281)仅 18、21 年。授时历步日食,食分有 2 分左右、食甚时刻有近 30 分钟的误差。由于食分有差,故初亏、复圆时刻失天更多。

至元二十九年正月甲午朔日食,授时历推算食分为 7 分 17 秒(0.72),与天有 0.24 的误差。天文志所载为实测记录,与现代天文计算得食分 0.96 的日环食完全吻合。食甚时刻授时历失天 20 分钟。

## (二)盈缩、迟疾、加減差及迟疾行度的计算

授时历于日月五星盈缩,皆以垛积招差立算,法既简单,又较合天。其术前已述及。日月食推步中,不时要计算盈缩、迟疾、加減差及迟疾行度。这里介绍在手边没有太阳盈缩、太阴迟疾立成表的情况下,怎样用简单的方法直接得到它们。

太阳盈缩、太阴迟疾布立成法如表 10-22 所示。

计算太阳盈缩,视日辰在冬至、夏至前后位置判定。冬至后为盈历,夏至后为缩历。盈初缩末限为 88.909225 日,缩初盈末限是 93.712025 日。入盈历者,在盈初缩末历以下,为初限,以上,反減半岁周 182.62125 日,余为末限;入缩历者,在缩初盈末限以下,为初限,以上,反減半岁周为末限。

计算月行迟疾,视所求日辰入转日分(距近地点日数)而定。入转日分小于转中 13.7773 日,为疾历;大于转中,则减去转中为迟历。将迟疾历日及分,以 12.20 限(1 日的限数)乘之,得数(迟

表 10-22 太阳盈缩、太阴迟疾布立成法

积日	盈缩积差(度)	盈缩加分	平立合差	加分立差
限数	迟疾积差(度)	损益分	平立合差	损益立差
初	A	B	C	
1	A	A+B	B+C	C
2	2A+B	A+2B+C	B+2C	C
3	3A+3B+C	A+3B+3C	B+3C	C
4	4A+6B+4C	A+4B+6C	B+4C	C
5	5A+10B+10C	A+5B+10C	B+5C	C
6	6A+15B+20C	A+6B+15C	B+6C	C
S	$SA + \frac{S(S-1)}{2}B + \frac{S(S-1)(S-2)}{6}C$	$A+SB + \frac{S(S-1)}{2}C$	B+SC	C

疾限)小于等于 84,为初限;大于 84,则反减中限 168,余为末限。

对于太阳盈初缩末历(即冬至前后各 88.909 日以内),立成表中的 A、B、C 数值为(分):

$$C = 6 \times \text{立差} = 6 \times 0.000031 = 0.000186$$

$$B = 2 \times \text{平差} + C = 2 \times 0.0246 + C = 0.049386$$

$$\begin{aligned} A &= \text{定差} - \text{平差} - \text{立差} \\ &= 5.1332 - 0.0246 - 0.000031 \\ &= 5.108569 \end{aligned}$$

太阳缩初盈末历(夏至前后各 93.712 日以内),A、B、C 数值(分)为:

$$C = 6 \times \text{立差} = 6 \times 0.000027 = 0.000162$$

$$B = 2 \times \text{平差} 0.0221 + C = 0.044362$$

$$\begin{aligned} A &= \text{定差} 4.8706 - \text{平差} 0.0221 - \text{立差} 0.000027 \\ &= 4.848473 \end{aligned}$$

太阴迟疾立成中,A、B、C 数值(度)为:

$$C = 6 \times \text{立差} 0.00000325 = 0.00001950$$

$$B = 2 \times \text{平差} 0.000281 + C = 0.0005815$$

$$\begin{aligned} A &= \text{定差} 0.1111 - \text{平差} 0.000281 - \text{立差} 0.00000325 \\ &= 0.11081575 \end{aligned}$$

知道了初日的加分(损益)立差 C、平立合差 B 及盈缩加分(初限损益分)A,则可以很容易求出第 S 日(限)的盈缩加分(损益分)、盈缩积度(太阴为迟疾积度)。

第 S 日盈缩加分 =

初日盈缩加分 A

$$- [S \times \text{平立合差} B + S(S-1) \times \text{加分立差} C/2]。$$

太阳第 S 日盈缩积差

$$= SA - [S(S-1)B/2 + S(S-1)(S-2)C/6] = \sum_0^{S-1} \text{盈缩}$$

## 加分

再由线性内插得出所求入历日分的太阳盈缩差。

盈缩差 = 入盈缩历日分去大余(定朔望或食甚入盈缩历日小数部分) × 盈缩加分 + 盈缩积度。

若太阴入迟疾历初末限数为  $S$  限, 其损益分、迟疾差为:

$$\text{第 } S \text{ 限损益分定积} = SB + S(S-1)C/2$$

$$\begin{aligned} \text{第 } S \text{ 限损益分} &= \text{初限损益分 } A - \text{第 } S \text{ 限损益分定积} \\ &= A - [SB + S(S-1)C/2] \end{aligned}$$

第  $S$  限迟疾积度

$$= S \cdot A - [S(S-1)B/2 + S(S-1)(S-2)C/6]$$

$$= \sum_0^{S-1} \text{损益分}$$

迟疾差 = 入迟疾历初末限  $S$  限的小数部分

×  $S$  限的损益分 +  $S$  限的迟疾积度

授时历盈缩、迟疾招差, 皆以初末一象限为法。初日盈缩加分、损分益分俱为最大之值。亦即盈缩加分、损益分都是前多后少。二差(平立合差)、三差(加分立差、损益立差), 由后减前得出, 所以皆为负数。而立成表中列出的  $ABC$  及各项数值俱为正数。故盈缩加分、盈缩积差、损益分、迟疾积度算式中出现减号。

月平行度 13.36875 度, 太阴限平行度为 1.0962 度。太阳日平行 1 度, 太阳限行 0.082 度(8.20 分)。

太阴所入迟疾限下行度 = 初限疾迟行度 ± 所入迟疾初末限  $S$  损益分定积。迟加、疾减。也可表示为:

$$\text{疾历 } S \text{ 限行度} = \text{月每限平行度 } 1.096 + S \text{ 限损益分}$$

$$\text{迟历初末 } S \text{ 限行度} = \text{月每限平行度 } 1.096 - S \text{ 限损益分}$$

$$\text{加减差} = \frac{(\text{盈缩差} \pm \text{迟疾差}) \times 0.082}{\text{所入迟疾初末限下行度}}$$

同名相从, 异名相消。盈迟、缩疾为同名, 盈疾、缩迟乃异名。

所得加減差,盈遲為加,縮疾為減。盈疾、縮遲加減從大者。

定入遲疾歷=遲疾歷±加減差

遲疾定限=定入遲疾歷×日轉限 12.20

定限行度=定限下遲疾行度—太陽限行分 0.082

遲疾差又法：

入遲疾歷日分內減日率(整限數×0.0820085),得日的小數  $t$ ,則：

遲疾差(度)

=遲疾積度+日的小數  $t$ ×損益分/8.20

=遲疾積度+日的小數  $t$ ×損益度/0.082

有條件的讀者,當然最好用盈縮差、遲疾差算式直接計算。

太陽盈初縮末歷(初末限為  $x$  日)：

盈縮差=[5133200-(31 $x$ +24600) $x$ ] $x$

太陽縮初盈末歷：

盈縮差=[4870600-(27 $x$ +22100) $x$ ] $x$

月亮運行遲疾差(初末限數為  $x$ )：

遲疾差=[11110000-(325 $x$ +28100) $x$ ] $x$

皆滿億為度。

用公式計算與用內插得出的遲疾差,有時在“秒”數位會出現不同,盈縮差有時會在“微”數位稍有差別。

日食食甚時,太陽圓面視直徑中被月球遮住的部分稱食分。現代天文以太陽視直徑為單位來度量。月食食分是食甚時,月球視直徑進入本影的部分與月球視直徑之比,以月球視直徑為單位。授時歷、大統歷,以分秒表示日月食食分。將日月視直徑當作 10 分。10 分以上即為全食。授時歷分秒俱為百進制。度百分、分百秒。因此,食分表示為小數形式與現代正好差 1 位。食分為 0.867 的日食,授時歷稱作 8 分 67 秒,表示為 0.0867。

### (三)明末的四次日食预报及观测

历法疏密,验在交食。明代中叶,弘治、正德年间,推算日月食起复,屡有舛误。部分官员在酝酿改历之事。至万历中,西洋新法传入。李之藻、徐光启奏上西洋历法,略言台监推算日月交食时刻亏分之谬,而力荐由传教士协助,乞敕礼部开局,共理历事。因此,明末这一段时期,文献上记载了多次日食的推步和台官测候的结果。在其中,我们选取了四次进行推步,并与历史所述做了比较。

①正德九年八月辛卯日食(1514年8月20日),“历官报食八分六十七秒。而闽广之地遂至食既”(《明史·历志》)。

②隆庆六年六月乙卯朔日食(1572年7月10日),“自卯正三刻至巳初三刻,所不尽分余”(《明神宗实录》)。“台官候得初亏卯正三刻,复圆巳初三刻,约食八分。大统推得见食八分二十一秒,初亏卯初二刻,食甚辰初初刻,复圆辰正二刻(李天经《古今交食考》)。

③万历二十四年闰八月乙丑朔(1596年9月22日)日食,大统历推初亏巳正二刻,食几既(《明史·历志》),“巳正二刻初亏正西,午初四刻食九分余”(《明神宗实录》);李天经《古今交食考》载,“台官测得初亏巳正二刻,食甚午初四刻,复圆午正四刻,约食八分余。”

④万历三十八年十一月壬寅朔(1610年12月15日)“日食,约七分余,在尾宿度。初亏未正三刻,申半,日入未复”(《明神宗实录》)。谈迁《国榷》说,“日食,初,钦天监奏,日食七分有余,未正一刻初亏,申初二刻食甚,酉初二刻复圆。春官正戈谦亨等又称未正三刻初亏,约食七分有奇。于是兵部职方员外郎驳之,谓亲验日晷,申初二刻略亏西南,申正二刻食甚,且不止七分五十余

秒。盖历官前后俱误也。”李天经《古今交食考》谓，“大统推得未正一刻初亏，申初三刻食甚，酉初初刻复圆。台官测得，初亏未正三刻，食甚申正初刻，至申正四刻日已入，未见复圆。查应天府是日日入申正四刻。若顺天则在申正二刻五分，是复圆时日已入三刻有奇。”

四次日食大统历和现代方法计算结果列于表 10—23。表中用(表 10—21 中已用) I、II 表示辰刻制中的初、正，以节省文字。如“卯初二刻”表示为“卯 I 2”，“巳正三刻”为“巳 II 3”等。前已说过，授时历、大统历以分秒表示日月食的食分，分秒皆为百进制。大于 10 分为全食，小于 10 分为偏食。如月食食分 12 分 56 秒，是月全食。可写成 12.56 分，也可标为 0.1256 度。

将推步结果与文献记载比较可以看出，我们的推步与明末文献所书的“大统推得”的食分和三限时刻完全一致。如正德九年八月辛卯日食，“历官报食八分六十七秒”；隆庆六年六月乙卯日食，“大统推得初亏卯初二刻，食甚辰初初刻，复圆辰正二刻，见食八分二十一秒”，等等。万历二十四年闰八月乙丑日食，邢云路上书云：“大统历推初亏巳正二刻，食几既。”但在邢云路所著《古今律历考》中，他自己用大统历推得的初亏时刻为巳正三刻。我们用大统推步所得与《古今律历考》三限时刻相同，食分 9 分 86 秒，也确属“食几既”。不知是否明史记载的邢云路上书中的巳正二刻为三刻之误。万历三十八年十一月壬寅日食，明末文献所记三限时刻有三种大统推算的结果，食分均为七分有奇。我们用大统推得的三限时刻基本上与《古今交食考》记载的相合，食分七分有奇也与所记一致。

授时历集古历之大成，是中国制的最完善的优秀历法，行用了 364 年，也最长久。交食是检验历法最方便、可靠的依据。交食的推步也一直受到历代的重视。前面以 7 次元明日食记载来

表 10-23 明末四次日食大统历推步过程和现代计算结果

	正德九年八月辛卯 1514 年 8 月 20 日	隆庆六年六月乙卯 1572 年 7 月 10 日	万历二十四年闰八月乙丑 1596 年 9 月 22 日	万历三十八年十一月壬寅 1610 年 12 月 15 日
距元积年(实足)	233	291	315	330
中积	85101.5025	106285.5675	115051.3875	120530.0250
通积	85156.5625	106340.6275	115106.4475	120585.0850
冬至	16.56252	20.6275	26.4475	45.0850
闰余	14.5385	25.1683	20.4022	6.3494
天正经朔	2.0240	55.4592	6.0453	38.7356
盈缩历	168.0828 缩末	157.4530 缩末	162.2191 缩末	176.2719 缩末
迟疾历	11.3797 疾	22.8821 迟	3.5508 疾	12.8757 疾
交泛	20.3784	22.7033	3.7411	26.7743
食月经朔	27.7994	51.7039	1.3513	38.7356
盈缩历	68.6156 缩初	28.4552 缩初	92.2825 缩初	176.2719 缩末
盈缩差	2.2143	1.2007	2.4004	0.3003
迟疾历	1.6091 疾	11.13546 疾	9.53346 迟	12.8757 疾
迟疾限	19.6305 疾初	135.85256 疾末 32.1474	116.3082 迟末 51.6918	157.0837 疾末 10.9163
迟疾差	2.0481	3.1732	4.5432	1.1751
加減差	-0.2930 缩疾同名相从	-0.3538 缩疾同名相从	+0.1524	-0.1219 缩疾同名相从



续表

	正德九年八月辛卯 1514年8月20日	隆庆六年六月乙卯 1572年7月10日	万历二十四年闰八月乙丑 1596年9月22日	万历三十八年十一月壬寅 1610年12月15日
食月定期	27.50634	51.3501	1.5037	38.6137
交泛	14.0315	14.0380	26.9247	26.7743
定入迟疾历	1.3160 疾	10.7817 疾	9.6859 迟	12.7538 疾
限	16.0553	131.5364 疾末 36.4636	118.16805 迟末 49.8320	155.5962
定期行度	1.1135	0.9367	1.0737	0.9117
半量分(应天府)	0.2667	0.2882	0.2511	0.2072
交常度	187.5835	187.6702	359.9502	357.9389
交定度	185.3692 中交	186.4694 中交	357.5498 正交	357.6386 正交
中前中后	0.00634 中后	0 1499 中前	0.0037 中后	0.1137 中后
时差	0.00326	0.05467	0.0019	0.04575
食甚定分	0.50960	0.29543	0.50565	0.65945
距午定分	0.0096	0.20457	0.00565	0.15945
食甚入盈缩历	68.3258 缩初	28.0467 缩初	92.43488 缩初	176.1957 缩末 6.4256
盈缩差	2.2100	1.1862 缩减	2.4006	0.3038
食甚入盈 缩历定度	66.1158	26.86046	90.0343	175.8919 缩末 6.72935
南北泛差	2.1224	4.0742	0.1251	4.4358
南北定差	2.0460 减	1.1818 减	0.1223 加	1.02225 减

续表

	正德九年八月辛卯 1514年8月20日	隆庆六年六月乙卯 1572年7月10日	万历二十四年闰八月乙丑 1596年9月22日	万历三十八年十一月壬寅 1610年12月15日
东西泛差	4.1192	2.2373	4.4577	0.6329
东西定差	0.1582 加	1.8310 减	0.1007 减	0.4035 减
日食入正交 中交定限度	186.1622 中交	185.0372 中交	357.6617 正交	356.2143 正交
入阴阳历去 交前后度	0.7930 阳历交前	1.4322 阴历交后	0.1118 阴历交前	1.4243 阳历交后
日食分秒	0.0867 8 <sup>m</sup> 67 <sup>s</sup>	0.0821 8 <sup>m</sup> 21 <sup>s</sup>	0.0986 9 <sup>m</sup> 88 <sup>s</sup>	0.0763 7 <sup>m</sup> 63 <sup>s</sup>
定用分	0.0511	0.0603	0.0535	0.0612
初亏时刻	0.4585 11:00 午 I 0	0.2351 5:39 卯 I 2	0.4522 10:51 巳 II 3	0.5983 14:22 未 II 1
食甚时刻	0.5096 12:14 午 II 0	0.2954 7:05 辰 I 0	0.5056 12:08 午 II 0	0.6595 15:50 申 I 3
复圆时刻	0.5607 13:27 未 I 1	0.3557 8:32 辰 II 2	0.5591 13:25 未 I 1	0.7207 17:18 酉 I 1
食类	日全食	日全食	日环食	日环食
均时差 Z	0° 09 0 <sup>m</sup> .36	1° 34 5 <sup>m</sup> .36	-1° 87 -7 <sup>m</sup> .48	-1° 04 -4 <sup>m</sup> .16
北京食分	0.70	0.91	0.94	0.61
初亏时分 平时,视时	10:42 10:27	7:00 6:40	9:58 9:51	14:46 14:36
食甚时分 平时,视时	11:58 11:43	8:16 7:56	11:17 11:10	16:14 16:04
复圆时分 平时,视时	13:14 12:59	9:44 9:24	12:36 12:29	17:28 17:18

反复说明授时历的步交食方法。这些实例证明复原的授时历、大统历步交食法确与其时颁行历法的推步方法一致,对其精度也有所了解。

明朝的这4次日食,除正德九年八月日食外,文献中均有详细的观测记录。

隆庆六年六月日食,“自卯正三刻至巳初三刻,所不尽分余”。“台官测得初亏卯正三刻,复圆巳初三刻,约食八分。”卯正三刻当北京视时 $6^{\text{h}}31^{\text{m}}\sim 6^{\text{h}}46^{\text{m}}$ ,巳初三刻为 $9^{\text{h}}31^{\text{m}}\sim 9^{\text{h}}46^{\text{m}}$ 。与现代方法计算比较,初亏时间合,复圆时刻实测稍迟几分钟,食分实测与计算相当或稍小。万历二十四年闰八月日食记录的实测时刻,初亏为巳正二刻(约当 $10^{\text{h}}17^{\text{m}}\sim 10^{\text{h}}31^{\text{m}}$ ),食甚午初四刻(当 $11^{\text{h}}46^{\text{m}}\sim 12^{\text{h}}$ ),复圆午正四刻(当 $12^{\text{h}}46^{\text{m}}\sim 13^{\text{h}}$ )。食分实测一作八分余,一作九分余。食分实测与现代计算基本一致或略小,三限时刻皆有约近半小时的误差。万历三十八年十一月日食,实测未正三刻初亏(当 $14^{\text{h}}31^{\text{m}}\sim 14^{\text{h}}46^{\text{m}}$ ),申正初刻( $16^{\text{h}}\sim 16^{\text{h}}02^{\text{m}}$ )食甚,日带食而没,未见复圆,食七分余。初亏、食甚时刻与现代计算一致,实测食分稍大。

纪时日食观测记录是研究地球自转长期变化的极其有用的材料。上述三限时刻中实测与现代计算之间的差异问题,笔者及其他作者在有关地球转速变化研究文章中将做深入分析考查,有兴趣的读者可以参看。

从以上7次元明日食的推算和实测结果比较中,可以看出,授时历步日食结果与真实天象,就北京地区见食而言,食分约有一至二分的误差,食甚时刻平均约差半小时(通常在 $10^{\text{m}}$ 至 $60^{\text{m}}$ 之间)。但是值得注意的是,授时历、大统历行用的这364年间,步日食的精确度,看不出随行用年代的延续而有明显降低的趋势。尽管明代大统历推算北京见食情况而一直采用南京应天府

的晷漏半昼分时刻,情况仍然如此。

#### (四)授时历大统历月食推步实例

《明史》记载,景泰元年正月月食,监官误推,致失救护。成化十五年十一月戊戌望月食,监推又误。弘治中,月食屡不应,日食亦舛。明代中叶,成化以后,交食往往不验,议改历者纷纷。中国古代不太重视月食。但从明史所述,可知,在检验历法疏密方面,月食推步和观测也有着举足轻重的作用。

下面以元明四次月食为例,进一步介绍授时历、大统历推步月食的具体过程,元代月食选取至正五年乙酉岁八月十六日丁卯夜望月食(1345年9月12日),出于《黑城出土文书》(载《文物》1987年7期,图版四)。明代三食,其一选取万历三十三年乙巳岁二月十七日辛酉月食(1605年4月4日),事载《国权》、《湖北蕲州志》。另外两次选取明史记载的验历月食。一为景泰元年正月辛卯,卯正三刻月食(1450年1月28日)。史称监官误推辰初初刻,致失救护。下法司,论徒。诏宥之。又一为崇祯五年九月十五日(1632年10月28日)月食,监推初亏在卯初一刻,徐光启等推在卯初三刻,回回科推在辰初初刻。三法异同,致奉诘问。至期测候,阴云不见,无可证验。

表10-24列出用大统历步月食法推步和用现代方法计算这四次月食的结果,并讨论大统术推步的疏密。

元至正月食与现代计算,食分相差0.288,食甚时刻相差26分钟。明万历月食食分差0.159,食甚时刻失天49分钟。元食时刻偏早,明食稍迟。

根据《明史》记载,景泰元年正月辛卯月食,钦天监推当辰初初刻,我们用大统历推步比这早1分钟。崇祯五年九月十五日月食,监推初亏在卯初一刻,与我们以大统推步所得相合。景泰月

表 10-24 元、明四次月食授时历、大统历推步程序和现代计算结果

	正五年八月十六丁卯 1345 年 9 月 12 日	万历三十三年二月十六 1605 年 4 月 3~4 日	景泰元年正月辛卯 1450 年 1 月 28 日	崇祯五年九月十五 1632 年 10 月 28 日
距元	64	324	169	351
中积	23375.52	118338.57	61725.9825	128000.1175
通积	23430.58	118393.63	61781.0425	128055.1775
冬至	30.58	13.63	41.0425	35.1775
闰余	7.4953	0.1583	27.2481	28.0183
天正经朔	23.0847	13.4717	13.7944	7.1592
盈缩历	175.1259 缩末	182 4629 缩末		
迟疾历	0.9671 迟	4.4253 疾	17.0055	1.1205 疾
交泛	18.7630	18.4884	7.4492	1.3507
食月经朔	48.8600	42.0635	12.8556	31.9958
盈缩历	75.6587 缩初	88.4335 盈初	31.8131 盈初	114.1970 缩末 68.4243
迟疾历	4.9737 疾	10.3532 疾	20.9575 迟 7.1802	9.0792 迟
交泛	12.41614	25.4435	12.0860	26.8528
食月朔交泛	27.18144	12.9966	26.8513	14.4058
食月经望	3.6253	56.8288	27.6209	46.7611
盈缩历	90.42424 缩初	103.1988 盈末 79.4225	46.5784 盈初	128.9623 缩末 53.659
盈缩差	-2.3976	2.3390	1.8259	-1.9982
迟疾历	5.9617 迟	11.3412 迟	8.1682 疾	10.0672 疾

续表

	正五年八月十六丁卯 1345年9月12日	万历三十三年二月十六 1605年4月3~4日	景泰元年正月辛卯 1450年1月28日	崇祯五年九月十五 1632年10月28日
迟疾限	72.7327 迟初	138.3626 迟末 29.6374	99.6520	122.82 疾末 45.18
迟疾差	5.3436	2.9684	-5.2431	-4.1462
加减差	0.22426 加	0.3681 加	-0.2620	-0.4887
食月定望	3.8489	57.1969	27.3589	46.2724
日出分	0.2476	0.2408		
日晨分	0.2226	0.2158		
定入迟疾历	6.1860 迟	11.7093 迟	7.9062 疾	9.5785 疾
迟疾限	75.4692	142.8534	96.4556	116.8577
定限行度	1.0002	1.1047	0.9932	0.9580
交常度	363.3818	173.7483	358.9683	192.5875
交定度	360.9843	176.0866	360.7943	190.5893
卯酉前后	0.1504 酉后	0.1969 卯前	0.1411 卯后	0.2276 卯后
时差	0.004732	0.00811	0.0042	0.0108
食甚定分	0.8449	0.2050	0.3631	0.2832
食甚入盈缩历	90.9436 缩初	103.575 盈末 79.0462	46.3206 盈初	53.1811 缩末
盈缩差	2.3980	2.3358	1.8191	1.9875
食甚入盈缩历定度	88.24563	105.9108	48.1397	51.1936
月食入阴阳历	阴历	阳历	阴历	阴历

续表

	正五年八月十六丁卯 1345年9月12日	万历三十三年二月十六 1605年4月3~4日	景泰元年正月辛卯 1450年1月28日	崇祯五年九月十五 1632年10月28日
去交前后度	2.8091 交前	5.8101 交前	3.0000 交前	8.6926 交后
月食分秒	0.1177	0.0832	0.1155	0.0501
定用分	0.0721	0.0598	0.0723	0.0575
初亏	0.7728 18:33 酉Ⅱ 2	0.1452 3:29 寅Ⅰ 2	0.291 6:59	0.226 5:25 卯Ⅰ 1
食甚	0.8449 20:17 戌Ⅱ 1	0.2050 4:55 寅Ⅱ 3	0.363 8:43	0.283 6:48 卯Ⅱ 3
复圆	0.9170 22:00 亥Ⅱ 0	0.2648 6:21 卯Ⅱ 1	0.435 10:27	0.341 8:11 辰Ⅱ 0
既内分	0.0129			
既外分	0.0592			
食既	0.8320 19:58 戌Ⅰ 4			
生光	0.8578 20:35 戌Ⅱ 2			
食类	月全食	月偏食	月全食	月偏食
均时差 平一视	-1° 7' -6 <sup>m</sup> .8	0° 8' 3 <sup>m</sup> .2	3° 8' 15 <sup>m</sup> .2	-4° 0' -16 <sup>m</sup> .0
食分	1.465	0.991	1.217	0.409
北京初亏	19:00 平 18:52 视	2:50 平 2:32 视	6:51 平 6:21 视	5:46 平 5:48 视
食既	20:04 平 19:56 视			
食甚	20:51 平 20:43 视	4:24 平 4:06 视	8:37 平 8:07 视	6:59 平 7:01 视
生光	21:37 平 21:29 视			
复圆	22:41 平 22:33 视	5:58 平 5:40 视	10:24 平 9:54 视	8:12 平 8:14 视

食与现代计算比较看出,大统食分仅小 0.06,食甚时刻约迟 36 分钟。崇祯月食,大统推算,食分略大 0.09,食甚略早约 13 分。授时历制定于七百多年前,行用了 364 年。由此看出,对于步日月交食来说,食分和食相时刻如此的精度,对于古代历法,应该说还是比较精密的。徐光启推得崇祯五年九月十五日月食,初亏应在卯初三刻。与现代计算完全一致,说明西洋新法步交食确又比授时历高出一截。

## 第八节 步五星术

### 一、基本法数和五星动态表

授时历不用上元积年,历法推步依据精密观测得出的历元七应。七应与岁实、朔实、岁差及二十八宿距度等历法常数不同,它是与历元有关的 7 项天文实测数据,作为日月交食、五星推步的初始条件,也就是计算的起点。

七应中,气应是指历元冬至(至元十八年辛巳岁前冬至 1280 年 12 月 14 日)的干支、时刻为己未日六刻(55.0600 日)。闰应为历元冬至的平月龄,即历元冬至距天正经朔的日分,20.2050 日。冬至干支时刻内减闰余即得出天正经朔的大余小余。气应、闰应是步气朔的基本起始条件,也是授时历各项推步的基础。周应是历元冬至时刻太阳所在的赤道位置箕宿 10 度(黄道箕 9 度),与赤道虚宿 6 度之间的赤道积度 315.1075 度。在步日躔中要用到。转应指历元冬至时刻与其前月过近地点的时距为 13.0205 日,即给出历元月轨近地点的位置。这是步月离,计算月行迟疾差必需的起始条件。朔望日而又当日月处在黄白交点附近时才会发生日月食。所以步交食中,必须计算朔望入交。交应 26.0388 日,为历元冬至时刻与其前月过降交点之间的时距,是计



算食月朔望入交的基本数据。

步五星中,要计算行星运行的盈缩,必须要确定行星的某些特定位置,以及在这些位置时,行星与轨道近日点的角距离。授时历选取星日黄道经度相合作为这种特定位置。合应指历元冬至与其前五星平合(历元平合)之间的时距。历应与合应配合,给出五星历元平合时的平近点角(历元平合与近日点的距度),又称历元平合的入历度。授时历给出的历应数值是时距,它与合应的关系为:

$$\text{历应} = \text{合应} + \text{历元平合入历度} \times \text{度率}$$

表示成度为:

$$\text{历元平合入历度} = (\text{历应} - \text{合应}) / \text{度率}$$

度率为五星行天1度所需的时日分。

合应,历应,五星各不相同。有了合应、历应,就可以计算出任意的五星平合位置和平合入历度。

授时历步五星基本数据:

历度 365.2575 度。

$$\text{历中} = \frac{1}{2} \text{历度} = 182.62875 \text{ 度。}$$

$$\text{历策} = \frac{1}{24} \text{历度} = 15.2190625 \text{ 度。}$$

周率(日):五星会合周期。

历率(日):五星恒星周期。

度率:五星行天1度所需的日数,也为五星恒星周期(恒星年)。历率/度率=历度。

伏见:日星相距目视可见的最小角距。

五星盈缩立差、平差、定差。

周率、历率、度率、伏见、合应及历应,五星皆不相同。其值如表 10—25 所示。

表 10-25 五星周率、历率、度率、合应、历应值

	木星	火星	土星	金星	水星
周率	398.88	779.9290	378.9016	583.9026	115.8760
历率	4331.2965	686.9580	10747.8846	365.2575	365.2575
度率	11.8582	1.88075	29.4255	1.0	1.0
合应	117.9726	56.7545	17.5643	571.6330	70.0437
历应	1899.9481	547.2938	5224.0561	11.9639	205.5161
伏见	13	19	18	10.5	16.5,19

表 10-26 以木星为例,介绍五星动态表的形式。

表 10-26 木星动态表

段目	段日	平度	限度	初行率
合伏	16.86	3.86	2.93	0.23
晨疾初	28	6.11	4.64	0.22
晨疾末	28	5.51	4.19	0.21
晨迟初	28	4.31	3.28	0.18
晨迟末	28	1.91	1.45	0.12
晨留	24			
晨退	46.58	4.88125	0.32875	
夕退	46.58	4.88125	0.32875	0.16
夕留	24			
夕迟初	28	1.91	1.45	
夕迟末	28	4.31	3.28	0.12
夕疾初	28	5.51	4.19	0.18
夕疾末	28	6.11	4.64	0.21
夕伏	16.86	3.86	2.93	0.22

## 二、五星周期数据、合应历应的精度

实测得出的七应是授时历给出的历元 7 项基本天文数据,为日月交食五星推步的基础。它的精度直接影响到推步结果的疏密。这里,有必要考查一下五星合应和历应的精度。

前已说过,合应是历元冬至时刻与其前五星平合(水、金上

合)时刻间的时距。太阳平均日行1度。因此合应值实际上也是五星平合与冬至点之间的角距(中国历度)。冬至点的黄经为 $270^{\circ}$ 。将五星合应值乘以 $360/365.2575$ ,化为 $360^{\circ}$ 制,与冬至点黄经 $270^{\circ}$ 相减,即为授时历给出的历元五星平合的黄经度。我们根据现代方法计算了水、金、火、木、土五星在授时历元时对应的实合的黄经和时刻,与授时历的比较列于表10-27中。

从授时历五星最大盈缩差看出,郭守敬等测定的五星平合位置是比较准确的。外行星中,火星的轨道偏心率最大,相对平运动盈缩改正也最大。我们计算给出的是实合位置,授时历测定得到的是火星的平合位置。测算误差、中心差改正以及其他摄动因素加到一起, $16^{\circ}.6$ 的黄经差是不足为奇的。水金二星,附日而行。它们的轨道运动,目视观测不易确定。它们的相对误差稍大,也是可以理解的。

授时历历议、历经,大统历法原、立成、推步中均未对历应做详细说明。气、闰、周、转、交、合六应都有比较明确的天文意义。历应与它们不同,天文意义不是那么直接、明显。理解它似乎稍微要绕点弯子。顾名思义,历应似指历元冬至距五星过近日点的时间间隔,或为冬至点与五星近日点的角距(冬至点的平近点角),即冬至点的入历度。对于水金二星,确是如此。金星历应 $11.9639$ 度,就是冬至点与金星近日点间之角距离,即冬至点的平近点角或称作冬至点的入历度。水星历应 $205.5161$ 度,与此相同,就是冬至点距水星近日点的角度。这个角度是水星、金星历元平合(授时历历元冬至前的平合)入历度(平合与近日点的角距或平合的近点角)与合应(历元平合与冬至点间的角距)相加之和。

授时历给出的历应值是日分,它的确切的天文意义是,行星自近日点走到历元平合所需的日分加上平合与历元冬至间的时

表 10-27 授时历元五星平台、实合的比较

		水星	金星	火星	木星	土星
授时	平台黄经	201°.0	66°.6	214°.1	153°.7	252°.7
	平台时刻	2188856.016	2188354.427	2188869.306	2188808.087	2188908.496
计算	实合黄经	196°.8	71°.6	197°.5	15°.6	253°.7
	实合时刻	2188853.625	2188358.925	2188854.375	2188811.825	2188910.125
	黄经差	4°.2	-5°.0	16°.6	-1°.9	-1°.0
	时刻差	2.391 日	-4.498 日	14.931 日	4.138 日	1.029 日
授时	最大盈缩	2°.25	2°.10	25°.24	5°.91	6°.2~8°.1
实	最大中心差	23°.68	0°.78	10°.70	5°.53	6°.40

距(合应)。用数学算式表达,就是:

$$\text{历应(日分)} = \text{合应(日分)} + \text{历元平合入历度} \times \text{度率}$$

合应亦即平合与冬至点的距度。金水二星度率 10000,即授时历认为日行 1 度。由此式看出,历应就是历元平合入历度与合应(平合与冬至点的角距离)之和。亦即冬至点与行星近日点间的角度。

对于火、木、土三星,虽历元平合入历度与合应相加,其和并不等于历应值,但其和表示冬至点与行星近日点间的角距,这是没有疑义的。

冬至点的黄经为  $270^\circ$ 。历应、合应值,授时历经中已给出。历元平合入历度可由下式求出:

$$\text{历元平合入历度} = (\text{历应} - \text{合应}) / \text{度率}$$

将历元平合入历度与合应相加,其和化为  $360^\circ$  制,与冬至黄经  $270^\circ$  相减,就可得出授时历测定给出的历元五星近日点黄经值。与我们用现代方法计算得出其时近日点实黄经比较结果如表 10-28 所示。

表 10-28 授时历历元五星近日点黄经的精度( $^\circ$ )

		水星	金星	火星	木里	土星
授时历	历元平台入历度	133.52	-551.61	257.07	148.11	174.39
	冬至点近日点角距	202.56	11.79	313.0	264.38	191.70
	近日点黄经	67.44	258.21	317.0	5.62	78.30
是时近日点真黄经		66.28	121.43	322.83	2.79	78.98
授时历测算误差		1.16	136.78	-5.83	2.83	0.68

可以看出,授时历测得的近日点黄经比较准确。五星中,金星的轨道偏心率最小,几近圆形。盈缩差改正小,中心差最大只有  $0^\circ.8$ 。附日而行。根据盈缩差间接得出近日点位置,有较大困

难,所以它的误差最大。

授时历的制定,遍考汉以后著名历法四十余家。步五星的基本数据也大多参照比对了金赵知微的重修大明历和耶律楚材的西征庚午元历,而做了些微调整与修改。这几部历法给出的五星会合周期、恒星周期是比较准确的。各历稍有不同,互有短长。表 10-29 中将授时历数值列出,并与现代得出的数值做了比较。

表 10-29 授时历五星的会合周期、恒星周期

	会合周期(日)			恒星周期(日)		
	授时	今测	相差	授时	今测	相差
水星	115.876	115.88	0	365.258	87.969	
金星	583.903	583.92	-0.02	365.258	224.701	
火星	779.929	779.94	-0.01	686.958	686.980	-0.022
木星	398.880	398.88	0	4331.296	4332.589	-1.293
土星	378.092	378.09	0	10747.88	10759.20	-11.32

行星绕日公转一周所需的时间,称为公转周期或恒星周期。行星连续两次合(内行星上合)或两次冲的时间间隔叫作会合周期。行星的冲、合,不仅决定于行星本身的运动,而且和我们地球的运动也有关系。所以离地球越近的行星,例如金星、火星,它们的会合周期越长。

会合周期、恒星周期是现代天文术语。中国古历没有这些名称。称会合周期为“一见”、“一复”、“一终日数”等。古历中有五星“行天一周”、“一周于天”的说法。在授时历、大统历中用历率、度率来表示。在金元历法给出五星行天一周数值以前,古历的这个数值,实际上可以根据行星的日平行率、“一日星行”计算得出。天文书中这样说,恒星周期就是以恒星作为标准点,行星与某一恒星两次同一黄经的时间间隔。据此定义,中国古历五星行天一

周的数值就是恒星周期。但要指出,中国古历以五星行天一周所表示的“恒星周期”与现代天文学的恒星周期并非同一概念。后者是指行星绕日公转的时间,或对太阳上的观测者而言,行星从恒星间的某点再回到同一点所需的时间。而中国古历认为日月星辰诸天皆绕地旋转,当然谈不到公转周期问题。作为五星行天一周的“恒星周期”,中国古历是对地球上的观测者而言的,指行星从恒星某点再回到同一点的时间。这对于火、木、土外行星问题不大,对于水星、金星内行星,就完全是两回事了。

金、水二星附日而行。虽然在每个会合周期,金、水二星都有一段时间在天空自东向西逆行。但观测它们的运动会发现,金、水二星的黄经变化与太阳差不多,基本上一年一个周期,从 $0^{\circ}$ 到 $360^{\circ}$ 。水星一年有3.15个会合周期,会出现3次逆行。逆行弧约 $14^{\circ}$ ,历时约23日,加留需时30日至40日。速度有快有慢,但大抵黄经从 $0^{\circ}$ 变到 $360^{\circ}$ ,需时一年。金星8年中有5个会合周期。8年中会出现5次逆行阶段。出现逆行的前后时期,金星的黄经从 $0^{\circ}$ 增加到 $360^{\circ}$ ,大约需历时400日。金星逆行弧约 $16^{\circ}$ ,逆行时间约42日,加上前后留需时60~70日。金星处顺行中间时期,其黄经从 $0^{\circ}$ 增加到 $360^{\circ}$ ,大约只需时300日。黄经周期变化长段、短段并非相间发生,有时长段会相连。平均说来,8年中,金星的黄经变化经历5个长段,3个短段,共历黄经从 $0^{\circ}$ 到 $360^{\circ}$ ,8个周期。也是大约一年一个周期,从 $0^{\circ}$ 到 $360^{\circ}$ 。即,从地球上,水星、金星从恒星间某点出发,行天一周,再回到起始位置,平均说来,需要一年。因此,很自然的,古人认为金星、水星运动,和太阳一样,日行1度,岁行1周。所以自古,直到授时历、大统历,一直把金星、水星的“恒星周期”视作1年。从古历“行天一周”的含义来看,古人对金、水二星的观测还是很细致准确的。不应该把水、金二星的“日行一度,岁行一周”的“恒星周期”,与今天天文测定

的 87.969 日、224.701 日的公转周期、恒星周期等同起来。

### 三、五星推步

从地球上看来,五星都在黄道附近运动,速度有疾有徐,主要做自西向东方向的运动(顺行),但有时会朝相反方向即向西运动(逆行)。顺行、逆行转换前后,行星在天空有一段时间似乎不动(留)。留以后,行星开始朝相反方向运动。行星运动呈现的顺逆留迟疾现象,实际上是五星轨道运动和地球绕日运动的综合结果。从太阳上看,行星运动并非如此,总是自西向东顺行,只速度稍许变化而已。可能有的读者对逆行有些不解。行星绕太阳旋转,它们在轨道上的速度同它们与太阳的距离有关。行星轨道速度所产生的离心力永远总和太阳的引力平衡。所以距日越远,行星的速度就越小。水、金、火、木、土五星的公转速度分别为(千米/秒):

水星 47.9	金星 35.0	地球 29.8
火星 24.1	木星 13.1	土星 9.6

如果某一时间,地球与火星同处太阳一侧,它们的运动方向一致。由于外行星速度较地球为慢,所以落后,形成逆行。对于木、土二星,同一道理。当它们与地球同在太阳一侧,也就是当它们处在冲附近时,从地球上看来,它们在星空间是在做从东向西的逆行。至于水星、金星,它们是内行星,比地球更接近太阳,有着比地球更大的速度。当它们与地球同处太阳一侧时,或当它们经过太阳和地球之间即下合附近时,地球上的观测者会发现,在下合以前,行星位于太阳东边,下合时日星相合,而下合后,行星跑到了太阳的西边。在这期间行星在作自东向西的逆向运动。

授时历与其前诸历一样,都是通过五星会合运动动态表来计算行星位置,确定见伏的日辰时刻。首先,根据五星的平位置,求



出入历度,计算五星轨道运动的盈缩差,得出会合运动动态表各段的行星位置和时刻;其次,根据得出的各段定积日分,计算日行盈缩,进行地球轨道运动改正,得到定见定伏的日辰时刻及定合行星所躔的黄道宿次和度分。

### 1. 推天正冬至后五星平合及诸段中积中星

$$\text{中积} = \text{积年} \times \text{岁实 } 365.2425$$

$$\text{前合} = [(\text{中积} + \text{合应}) / \text{周率}]_R$$

$$\text{后合} = \text{周率} - \text{前合}$$

$$\text{其星天正冬至后平合中积} = \text{后合}(\text{日})$$

$$\text{其星天正冬至后平合中星} = \text{后合}(\text{度})$$

平合中积日为平合距天正冬至的时距,中星为冬至点与平合的角距离。

$$\text{各段中积} = \text{后合中积} + \text{其前诸段段日之和} \left( \sum_1^{n-1} \text{段日} \right)$$

$$\text{各段中星} = \text{后合中星} + \text{其前诸段平度之和}$$

$$= \text{后合中星} + \sum_1^{n-1} \text{平度}$$

$n$  指所求之段数。段日、平度由五星动态表查出。

各段中积为各段初日距天正冬至的平时距,各段中星为各段初行星所在的平位置距冬至点的角度。所求段以前诸段中有退段者,则退段之平度求和时应相减(即退段之平度为负值)。

### 2. 推五星平合和诸段入历度及盈缩差

$$\text{平合入历度} = [(\text{中积} + \text{历应} + \text{后合}) / \text{历率}]_R / \text{度率}$$

$$\text{平合后各动态段的入历度}$$

$$= \text{平合入历度} + \text{其前诸段限度之和} = \text{平合入历度} + \sum_1^{n-1} \text{限度}$$

诸段限度数值由五星动态表查出。

入历度小于历中 182.62875 度,为盈历;大于历中,则入历度内减去历中,余数为入缩历。

盈缩历其数值小于周天象限度 91.314375 度,为初限;大于周天象限度,则反减历中为末限。即,末限 = 历中 - 盈缩历(大于 91.314375)。

火星,情况特殊。盈历在 60.87625 度以下,为初限;以上,用减历中,余为末限。即,末限 = 历中 - 盈历(大于 60.87625 度)。缩历,在 121.7525 度以下,为初限;以上,用减历中,余为末限,即,缩历末限 = 历中 - 缩历(大于 121.7525 度)。

$$\text{盈缩差} = [\text{定差} \pm (\text{平差} \pm \text{立差} \times \text{初末限}) \times \text{初末限}] \\ \times \text{初末限}$$

五星盈缩平差、立差、定差见基本法数。

除算式推步外,盈缩差也可由五星盈缩立成内插得出,做法如下:

置盈缩历,以历策 15.2190625 除之,为策数,不尽为策余。即:盈缩历/历策 = 策数 + 策余/历策。策余 = [盈缩历/历策]<sub>R</sub>。盈缩差 = 策数条下盈缩积 ± 策余 × 损益率/历策,益加损减。所得盈缩差与算式计算不尽相同。

### 3. 推平合诸段定积日、加时定日和所在月日

平合诸段定积日 = 各段中积 ± 盈缩差,盈加缩减。满岁周去之。如中积不及减者,加岁周减之。本段若无盈缩差,借前段差加減之。

平合诸段加时日辰(定日) = [(诸段定积日 + 天正冬至日分)/纪法]<sub>R</sub>。置定积日,以岁前冬至日分加之,满纪法(60)去之,至不满纪法。余数,命甲子算外(甲子为 0),即为定日(合伏诸段初日日辰)。(平合及诸段定积 + 天正闰余)/朔策 = 平合及诸段月数 + 入月以来日数/朔策。其月数,命天正十一月算外。余数即其段入月经朔日数及分秒。

$$\text{平合及诸段月数} = \text{Int}[(\text{平合及诸段定积} + \text{天正闰余})/\text{朔}$$

策]。入月以来日数 $=[(\text{平合及诸段定积} + \text{天正闰余}) / \text{朔策}]_R$ 。

这样,就得出了合伏及诸段初日所在的月日。据其月定朔干支,与加时定日(合伏及诸段初日日辰)相距,即得合伏及各段所在定朔月日。

$$\text{入月经朔干支} = \left[ \frac{\text{天正经朔} + \text{月数} \times \text{朔策}}{\text{纪数 } 60} \right]_R$$

4. 推各段定星、各段加时所在宿度、各段初日晨前夜半定星

诸段定星=各段中星±盈缩差。金星用 $2 \times$ 盈缩差,水星用 $3 \times$ 盈缩差,盈加、缩减。盈缩差依推定积日法求得。

诸段加时定星=诸段定星+天正冬至黄道日度。以黄道宿铃累减之,如不及减者,即为其星其段加时所躔黄道宿度。如减箕,余入斗;减斗,余入牛;等等。如其段原无中星度,则段下亦无定星及加时定星度分。

加减定分=定日小余 $\times$ 其段初行率。顺段为减分,退段为加分。

1003

诸段初日晨前夜半定星=加时定星±加减定分。以黄道积度铃累减之,得夜半宿次。其留段即用加时定星,为夜半定星。

5. 求五星每日晨前夜半星行宿次

日率=次段定日(日辰)-其段定日(日辰)。次段不及减,加纪法减之。

度率=次段夜半定星-其段夜半定星。次段不及减,加周天 $365.2575$ 度减之。凡近留之段,皆用留段加时定星,与本段夜半定星相减。如星度逆者(逆行段),以后段减前段即各得度率。

其段平行度分=度率/日率。

其段泛差=后段平行分-前段平行分。凡五星之伏段及近留之迟段及退段,皆无泛差。

增减差 $=2 \times$ 泛差/10。

初日末日行分=末段平行分±增减差。本段平行分与次段

平行分相较,前多后少者,加为初日行分,减为末日行分;前少后多者,减为初日行分,加为末日行分。

总差 =  $2 \times$  增减差。

日差 = 总差 / (日率 - 1)。初日行分多,为减差;末日行分多,为加差。合伏段(前伏)末日行分 = 后段初日行分 + 后段日差 / 2; 后伏(晨伏、夕伏)初日行分 = 前段(本段之前)末日行分 + 前段日差 / 2; 伏段增减差 = 伏段平行分 - 初日末日行分; 近留之前迟段(木火晨迟末,土之晨迟,金之夕迟末,水之夕迟)初日行分 = 前段末日行分 -  $2 \times$  前段日差; 近后留之迟段(木火夕迟初,土之夕迟,金之晨迟初,水之晨迟)末日行分 = 后段初日行分 -  $2 \times$  后段日差; 前后近留之迟段增减差 = 初日末日行分 - 迟段平行分。因五星之伏段及近留之迟段及退段,皆无泛差。所以前后伏、迟、退段之增减差,需另外求出。

木火土三星退行段增减差 =  $0.6 \times$  平行分

金星前后退伏段增减差 =  $3 \times$  平行分 / 20

前退段末日行分 = 后段初日行分 - 后段日差

后退段初日行分 = 前段末日行分 - 前段日差

增减差 = 初日末日行分 - 本段平行分

水星退行段增减差 = 平行分 / 2

以上五星伏段、近留之迟段及退段,亦有:

初日末日行分 = 平行分  $\pm$  增减差

前多后少时,加为初、减为末日行分;前少后多时,减为初、加为末日行分。

总差 =  $2 \times$  增减差

日差 = 总差 / (日率 - 1)

每日行分 = 其段初日行分  $\pm$  日差。后少则损之,后多则益之。并递次损益,则得其段逐日行度。即其段内每日(如第  $n$  日)

行度为：每日行度分=其段初日行分 $\pm(n-1)\times$ 日差。

每日晨前夜半星行宿次=其段初日晨前夜半宿次 $\pm$ 每日行度分秒。顺加退减。且满黄道宿次去之。亦即有：次日宿次=其段初日夜半宿次 $\pm$ 初日行分；每日行分=初日行分 $\pm$ 日差；每日夜半宿次=次日宿次 $\pm$ 每日行分。每日行分皆顺加退减。

第 $n$ 日晨前夜半星行宿次=其段初日晨前夜半宿次 $\pm(n-1)$ 日每日行度之和。第 $n$ 日的行度=初日行度 $\pm\sum_{i=1}^{n-1}$ 日差。

#### 6. 求五星平合见伏入盈缩历

五星其段定积日及分秒(若满岁周则去之,余在次年天正冬至后),如小于半岁周 182.62125 日,为入盈历;大于半岁周,去之,为入缩历。即定积日在冬至到夏至之间,为入盈历;在夏至到冬至之间为入缩历。

盈缩历各在初限以下,为初限;以上,反减半岁周,余为末限。即得五星平合见伏入盈缩历日及分秒。这样,可计算得出太阳盈缩差和行度、积度。

#### 7. 求五星平合见伏行差

行差=其段初日太阳行分-初日星行分  
金、水二星顺行时:

行差=其段初日星行分-是日太阳行分  
金、水二星退行、退合段:

行差=其段初日星行分+太阳行分

其中,水星在夕伏晨见时:

行差=其段初日太阳行分

#### 8. 求五星定合定见定伏泛积及定积定星

木、火、土三星定合见伏泛积日=平合、晨疾、夕伏定积日。

金星定合伏见泛积日=定积 $\pm\frac{\text{其段盈缩差}}{\text{其段行差}}$

$$\text{水星定合泛积日} = \text{定积} \pm \frac{2 \times \text{其段盈缩差度}}{\text{期段行差}}$$

平合夕见晨伏段，皆盈减、缩加；在退合夕伏晨见段，皆盈加、缩减。

木、火、土三星距合差日 = 其段初日太阳盈缩积 / 平合行差。

木、火、土三星距合差度 = 距合差日 - 太阳盈缩积。

木、火、土三星定合定积日分 = 其星定合泛积 ± 距合差日。

木、火、土三星定合定星度分 = 其星定合泛积 ± 距合差度。  
皆盈减、缩加。

金、水二星顺合退合者：距合差日 = 其日太阳盈缩积 / 平合退合行差。距合差度 = 距合差日 ± 太阳盈缩积。顺加、退减。

金水星顺合定合定积日分 = 其星定合泛积 ± 距合差日；金水星顺合定合定星度分 = 其星定合泛积 ± 距合差度；金水星退合定合定积日分 = 其星退合泛积 ± 距合差日；金水星退合定合定星度分 = 其星退合泛积 ± 距合差度。顺合者皆盈加缩减；退合者，盈减缩加距合差日，而盈加缩减距合差度。

以天正冬至日分加其星定合定积日分，满旬周 60，去之，命甲子算外（甲子为初日，不计入），即得定合日辰及分秒。

$$\text{定合日辰} = [(\text{天正冬至日分} + \text{其星定合定积日分}) / 60]_R。$$

以天正冬至加时黄道日度，加其星定合定星度，满黄道宿次，去之，即得定合所躔黄道宿度。

定合所躔黄道宿度 = 天正冬至加时黄道日度 + 其星定合定星度。以黄道宿铃累减之，如不及减者，即为定合所躔黄道宿次。

#### 9. 径求五星合伏定日

木、火、土三星，以夜半黄道日度，减其星夜半黄道宿次，余在其日太阳行分之下，为其日伏合。

金、水二星，以其星夜半黄道宿次，减夜半黄道日度，余在其日金、水二星行分以下者，为其日伏合。金、水二星伏退合者，查

太阳和金星、水星黄道位置比较接近的几天。如其日太阳夜半黄道宿次,未到金、水二星宿度,而次日太阳行过金星、水星宿度。金、水二星因退行,则其日为定见伏退定日。

#### 10. 求木、火、土三星定见伏定积日

各置其星定见定伏泛积日,晨加夕减象限日

91.3106日,如在半岁周 182.62125 日以下,命为  $A$ ,自相乘;以上,反减岁周,其余亦命为  $A$ ,亦自相乘,积满 75,除之为分,满百为度,不满,退除为秒。以其星伏见度乘之,15 除之,所得,以其段行差除之,为日,不满,退除为分秒。见加伏减泛积,为其星定见伏定积日及分秒。加命如前,即得定见定伏日辰及分秒。即,令:

$$k = \text{象限日} \pm \text{其星定见定伏泛积}$$

晨加夕减。若  $k < \text{半岁周 } 182.62125 \text{ 日}$ ,则取  $A = k$ ,若  $k > \text{半岁周}$ ,则令  $A = \text{岁周 } 365.2425 - k$ 。

木、火、土三星定见伏定积日 = 定见定伏泛积  $\pm$  (其星见伏度/15)  $\times (A^2/75)$  / 其段行差。见加、伏减。

定见定伏日辰 = [(天正冬至加时日分 + 其星定见伏定积日)/60]<sub>R</sub>。即,以天正冬至日分秒,加其星定见伏定积日及分秒,满旬周去之,命甲子算外,得定见伏日辰及分秒。

#### 11. 求金、水二星定见伏定积日

常积 = 其星定见定伏泛积日  $\pm$  其段初日太阳盈缩积/伏见其日行差。夕见晨伏,盈加缩减;晨见夕伏,盈减缩减。

常积如小于半岁周,为冬至后,大于半岁周,去之,余为夏至后。所得为冬至后,夏至后常积数。二至后常积各在 91.3106 日以下,命为  $c$ ,自相乘;以上,则令  $c = \text{半岁周 } 182.62125 - \text{二至后常积}$ ,亦自相乘。

冬至后晨、夏至后夕定见定伏定积日 = 常积(原数)  $\pm$  (其星见伏度/15)  $\times (c^2/18)$  / 行差;冬至后夕、夏至后晨定见定伏定积日

$= \text{常积(原数)} \pm (\text{其星见伏度}/15) \times (c^2/75)/\text{行差}$ 。在晨见夕伏者,冬至后加之,夏至后减之;夕见晨伏者,冬至后减之,夏至后加之。

定见定伏日辰 $=[(\text{天正冬至加时} + \text{金水二星定见定伏定积日})/60]_R$ 。命甲子算外。

授时历步五星术和宋金各历如崇天、观天、纪元、重修大明、庚午元历等大致相同,仅加入合应、历应及平立定三差而已。诸历中,纪元历、重修大明历比较完备。授时历多采用之。其关于五星运动周期和数据也大致和耶律楚材庚午元历相同。清梅文鼎说,五星之迟疾逆留,汉以前无言之者,汉以后语焉而不详。虽授时历号为精密,而于此未有精测。至西历乃能言之。有的学者也指出,授时历推算五星位置比较繁琐,而结果不及回回天文学的精密。由在下节的计算实例中可看出,与西法相比,中国古历步五星术相对来说进步、发展比较迟缓。但授时历步五星尚较准确。

大统历沿用授时历步五星术,略有改易。其推五星交宫时刻和五星伏见,方法稍有不同。

## 12. 大统历推五星顺逆交宫时刻

逐日审视五星细行(约当现今五星星历表),与黄道十二宫界宿次同名、度分又相近者以相减。视其余分,在本日行分以下者,为交宫之日。

顺行交宫宫度差 $=$ 十二宫某宫界度分 $-$ 本日夜半星行宿次;  
逆行交宫度分差 $=$ 本日夜半星行宿次度分 $-$ 某一宫界度分。

交宫时刻 $=$ 顺行、逆行交宫度分差 $\times$ 日周/本日星行分。

## 13. 大统历推五星伏见

凡取伏见,伏者要在伏见度以下,见者要在以上。

晨见晨伏其日晨昏伏见度 $=$ 其日太阳行度 $-$ 各星行度;夕见



夕伏其日晨昏伏见度=其日各星行度-太阳行度。

晨昏伏见分=(次日伏见度-本日伏见度)/4。

晨伏见度=本日伏见度±伏见分。

夕伏见度=本日伏见度±3×伏见分。视本日伏见度较次日伏见度为多者减,少者加。根据五星伏见度,在其上下选取伏见日期。

## 第九节 五星推步实例及其精度

授时历五星推步汲取了纪元历、重修大明历、庚午元历的基本方法和数据,不用积年日法,测算给出了合应、历应,并用平立定三差法改进了五星盈缩的计算。那么,授时历计算五星运动和位置到底精确度如何呢?

《明史·历志》云,崇祯七年(1634),李天经预推五星凌犯会合行度,言“闰八月二十四(1634年10月15日)木犯积尸气。九月初四(10月25日)昏初,火土同度。初七(10月28日)卯正,金土同度。十一(11月1日)昏初,金火同度。旧法推火土同度在初七,是后天三日。金火同度在初三(10月24日),是先天八日。”八年(1635),“天经推水星伏见及木星所在之度,皆与大统各殊,而新法为合。又推八月二十七(1635年10月7日)寅正二刻,木、火、月三曜同在张六度,而大统推木在张四度,火、月张三度。至期,果同在张六度。”

崇祯八年(1635)八月二十七日,大统历和新法推算的木、火、月位置相差2~3度。授时历五星度率数据就是平均运动1度所需的日分。从而可知1日平均运行的度分。金星平均日行1度,火星0.53度,土星很慢,平均日行仅0.034度。这样,分析可知崇祯七年(1634)九月,新法、旧法(大统历)推算的五星位置也有约2~3度的差别。《明史》记载,五星运动的推算,以“新法为

合”。由此，可得出，授时历、大统历推步五星有约  $2\sim 3$  度误差的定量概念。

但，新法推算的五星位置是否确实合天，我们用现代天文方法对上述明史记载进行了计算、考查，结果如表 10-30 所示。

表 10-30 崇祯七年八月日月五星实位置

年月日	时分	日(°)	月(°)	水(°)	金(°)	火(°)	木(°)	土(°)
1634. 10. 15	6 47	201. 6	123. 8	187. 9	242. 5	249. 7	122. 0	257. 4
	18 47	202. 1	129. 8	188. 7	243. 1	250. 1	122. 0	257. 5
1634. 10. 22	18 47	209. 1	213. 3	200. 4	251. 3	255. 3	122. 7	258. 1
1634. 10. 25	18 47	212. 1	251. 3	205. 5	254. 8	257. 5	123. 0	258. 3
1634. 10. 28	6 47	214. 6	284. 4	209. 6	257. 7	259. 3	123. 2	258. 6
1634. 11. 1	18 47	219. 1	347. 7	217. 0	262. 9	262. 7	123. 5	259. 0
1635. 10. 7	4 36	193. 3	147. 0	186. 5	178. 8	147. 1	147. 4	267. 3

太阳系天体(日月五星彗流等)走近恒星或相互接近在七寸以内(约当今  $1^\circ$ )或光芒相及者，称作凌犯。积尸气又名鬼星团，在鬼宿一东，黄经约相差  $1^\circ.6$  之处。鬼宿正当黄道。在 1634 年，鬼宿一的黄经为  $120^\circ.64$ ，积尸气黄经若当  $122^\circ.25$ 。由我们的计算可以看出，自崇祯七年闰八月二十四(1634 年 10 月 15 日)至九月初一(10 月 22 日)夜，木星的黄经自  $122^\circ.0$  到  $122^\circ.7$ ，在积尸气东西  $0^\circ.4$  以内。李天经的新法计算是合天的。《明史》谓，“天经又言，臣于闰八月二十五日夜及九月初一夜，同礼臣陈六谰等，用窥管测，见积尸为数十小星团聚，木与积尸，共纳管中。盖窥管圆径寸许，两星相距三十分内者，方得同见”。由上面的计算还可看出，李天经用新法推算得出九月初四(10 月 25 日)昏初，火土同度；初七(10 月 28 日)卯正，金土同度；十一(11 月 1 日)昏初，金火同度等与真实天象全都相符。

鬼宿一距黄道很近，黄纬不到 1 度。在崇祯七八年间，它的黄经为  $120^\circ.6$ 。鬼宿黄道距度为 2.11 度，柳 13 度，星 6.31 度。

即自鬼宿一到张宿一的黄道距度为 21.42 度。鬼宿一距张宿 6 度黄道距度为 27.42 度,化为  $360^\circ$  制为  $27^\circ.02$ ,以鬼宿一的黄经与它相加,得到张 6 度的黄经为 147.6 度。现在来看前面的计算结果,在崇祯八年八月二十七日(1635 年 10 月 7 日)寅正二刻,木、火、月三曜确都位在张 5~6 度;与李天经用新法推步所得结果一致。所以史称,“至期,果同在张六度。”

至此,我们可以确知,西洋新法步五星与天相合,这比大统历有了质的飞跃。授时历是 13 世纪中国自己制订的历法,行用了 300 余年。大统历沿用它来计算明末的五星位置,也仅只有 2~3 度左右的误差,亦属不易。

下面,我们以授时历步五星法来推算元大德三年、四年(1299—1300)和万历二十七年、二十八年(1599~1600)间的木星运动。以此为例,进一步说明推步方法并考查所得木星位置和在会合周期各动态运动的精确性。

1011

大德三年己亥(1299)木星历:

积年 18。

中积 = 积年  $18 \times$  岁实  $365.2425 = 6574.365$ 。

天正冬至 =  $[(\text{中积} + \text{气应 } 55.06) / 60]_R = 29.4250$  癸巳。

闰余 =  $[(\text{中积} + \text{闰应 } 20.205) / \text{朔策}]_R = 9.2478$ 。

天正经朔 = 冬至 - 闰余 = 20.1772(甲申)。

冬至赤道日度 =  $[(\text{中积} + \text{周应 } 315.1075) / \text{周天 } 365.2575]_R$   
 $= 314.8375$ (虚 6 至尾末共 305.1075 度) = 箕 9.7300。

冬至黄道日度 =  $8 + (9.73 - 8.67923) \div 1.0812 =$  箕 8.9718。

合伏:

前合 =  $[(\text{中积} + \text{合应}) / \text{周率}]_R = 310.2576$ 。

后合 = 周率 - 前合 = 88.6224。

天正冬至后平合中积: 88.6224 日。

天正冬至后平合中星:88.6224度。

平合入历度 =  $[(\text{中积} + \text{历应} + \text{后合}) / \text{历率}]_R / \text{度率} = 356.8534$ 。

缩末限 8.4041。

盈缩差 0.8961(缩)。

合伏定积日:平合中积土盈缩差=87.7263。

定日(去纪):合定积+冬至日分=57.1513(辛酉)。

合伏定星:平合中星土盈缩差=87.7263度。

加时定星:合伏定星+冬至黄道日度=96.6981。

合伏入月日:入二月十日(8.3823日)。

入月经朔干支日辰 48.7690。

加减定分:定日小余 $\times$ 初行率 $0.23=0.0348$ 度。

晨前夜半定星 96.6633(顺减)。

二月辛酉夜半木星度:壁 2.3058度。

晨疾初:

中积:平合中积+合伏段日=105.4824。

中星:平合中星+合伏平度=92.4824。

入历度:平合入历度+合伏限度=359.7834。

盈缩初末限 5.4741(缩末)。

盈缩差 0.5884(缩)。

定积:中积土盈缩差=105.4824-0.5884=104.8940。

定日(去纪 60):定积+冬至日分=14.3190 戊寅。

定星:中星土盈缩差=92.4824-0.5884=91.8940。

加时定星:定星+冬至黄道日度=100.8658。

加减定分:定日小余 $\times$ 晨疾初初行率=0.0702。

晨前夜半定星 100.7956(顺减)。

二月戊寅夜半木星度:壁 6.4381度。

晨疾末:

中积:晨疾初中积+晨疾初段日=133.4824。

中星:晨疾初中星+晨疾初平度=98.5924。

入历度:晨疾初入历度+晨疾初限度=364.4234。

盈缩限 0.8341(缩末)。

盈缩差 0.0907(缩)。

定积:中积±盈缩差=133.3917。

定日:定积+冬至日分=42.8167(去纪)丙午。

定星:中星±盈缩差=98.5924-0.0907=98.5017。

加时定星:定星+冬至黄道日度=107.4735。

所入月日:(定积+闰余)/朔策。入三月二十五。

入月经朔(去纪): $[(20.1772 + 4 \times 29.530593) \div 60]_R =$

18.2996 壬午。

加減定分:定日小余×初行率 0.21=0.1715。

晨前夜半定星 107.3020(順減)。

三月丙午夜半木星宿度:奎 3.6045 度。

晨迟初:

中积 161.4824。

中星 104.1024。

入历度 368.6134。

盈缩历 3.3559(盈初历)。

盈缩差 0.3627(盈)。

定积:中积±盈缩差=161.8451(盈加)。

定日:定积+冬至日分=11.2701(去纪)乙亥。

定星:中星±盈缩差=104.4651。

加时定星:中星+冬至黄道日度=113.4369 度。

所入月日:入四月二十五日(23.4399)。

入月经朔 47.8302(辛亥)。

加减定分:定日小余 $\times$ 初行率  $0.18=0.0486$ 。

晨前夜半定星:113.3883度。

四月乙亥夜半木星宿度:奎 9.6908度。

晨迟未:

中积 189.4824。

中星 108.4124。

入历度 371.8934。

盈缩历 6.6359(盈初)。

盈缩差 0.7110(盈)。

定积:中积土盈缩差=190.1934(盈加)。

定日(去纪)39.6184(癸卯)。

定星:中星土盈缩差=108.4124+0.7110=109.1234。

加时定星 118.0952。

所入月日:五月二十三日(22.2576)。

入月经朔 17.3608(辛巳)。

加减定分:定日小余 $\times$ 初行率  $0.12=0.0742$ 。

晨前夜半定星 118.0210度。

五月癸卯夜半木星宿度:奎 14.3235度。

晨留:

中积 217.4824。

中星 110.3224。

入历度 373.3434。

盈缩历 8.0859(盈初历)。

盈缩差 0.8629(盈)。

定积:中积土盈缩差=218.3453(盈加)。

定日 7.7703(辛未)。

定星：中星土盈缩差=111.1853(盈加)。

加时定星 120.1571 度。

所入月日：六月二十二日(20.8789)。

入月经朔 46.8914(庚戌)。

晨前夜半定星 120.1571 留段加时定星即夜半定星。

六月辛未夜半木星宿度：奎 16.4596 度。

晨退：

中积 241.4824。

盈缩差 0.8629；本段无差，借前段差加减之。

定积：中积土盈缩差=242.3453(盈加)。

定日 31.7703(乙未)。

所入月日：七月十六日(15.3484)。

入月经朔 16.4219(庚辰)。

晨前夜半定星 120.1571(度)。

七月乙未夜半木星宿度：奎 16.4596 度。

夕退：

中积 288.0624。

中星 105.44115。

入历度 373.67215。

盈缩历 8.41465(盈初)。

盈缩差 0.8972(盈)。

定积 288.9596(盈加)。

定日 18.3846(壬午)。

定星 106.3384 度。

加时定星 115.3102 度。

所入月日：九月初四日(2.9015)。

入月经朔 15.4831(己卯)。

加減定分:定日小余 $\times$ 初行率 $0.16=0.0615$ 。

晨前夜半定星 $115.3717$ 度(退加)。

九月壬午夜半木星宿度:奎 $11.6742$ 度。

夕留:

中积 $334.6424$ 。

中星 $100.5599$ 。

入历度 $374.0009$ 。

盈缩历 $8.7434$ (盈初)。

盈缩差 $0.9314$ (盈)。

定积:中积土盈缩差 $=335.5738$ (盈加)。

定日 $4.9988$ (戊辰)。

定星:中星土盈缩差 $=101.4913$ 度。

加时定星 $110.4631$ 度。

所入月日:十月二十日(19.9851)。

入月经朔 $45.0137$ (己酉)。

夜半定星 $110.4631$ 度,留段即用加时定星。

十月戊辰夜半木星宿度:奎 $6.7656$ 度。

夕迟初:

中积 $358.6424$ 。

盈缩差 $0.9314$ ,木段无差,借前段差加減之。

定积 $359.5738$ ,加盈差 $0.9314$ 。

定日 $28.9988$ (壬辰)。

所入月日:十一月十五日(14.4545)。

入月经朔 $14.5443$ (戊寅)。

夜半定星 $110.4631$ 度。

十一月壬辰夜半木星宿度:壁 $6.7656$ 度。

夕迟末:



中积 386.6424。

中星 102.4699。

入历度 375.4509。

盈缩历 10.1934(盈初)。

盈缩差 1.0814(盈加)。

定积:  $387.7238 - \text{岁周} = 22.4813$ 。

定日 57.1488(辛酉)。

定星 103.5513。

加时定星:  $\text{定星} + \text{本年冬至黄道日度} = 112.5092$ 。

所入月日: 十二月十四日(13.0738)。

入月经朔 44.0750(戊申)。

加减定分:  $\text{定日小余} \times \text{初行率} 0.12 = 0.01786$ 。

夜半定星 112.4913 度(顺减)。

十二月辛酉夜半木星宿度: 奎 8.7938 度。

夕疾初:

中积 414.6424。

中星 106.7799。

入历度 378.7309。

盈缩历 13.4734(盈初)。

盈缩差 1.4154(盈)。

定积 50.8153。

定日 25.4828(己丑)。

定星 108.1953 度。

加时定星 117.1532 度。

所入月日: 正月十三日(11.8772)。

入月经朔 13.6056(丁丑)。

加减定分:  $\text{定日小余} \times \text{初行率} 0.18 = 0.0869$ 。

夜半定星 117.0663 度(顺减)。

正月己丑夜半木星宿度:奎 13.3688 度。

夕疾末:

中积 442.6424。

中星 112.2899。

入历度 382.9209。

盈缩历 17.6634(盈初)。

盈缩差 1.8309(盈)。

定积 79.2308(盈加)。

定日 53.8983(丁巳)。

定星 114.1208。

加时定星 123.0787。

所入月日:二月十一日(10.7621)。

入月经朔 43.1362(丁未)。

加减定分:定日小余 $\times$ 初行率  $0.21=0.1886$ 。

夜半定星 122.8901(顺减)。

二月丁巳夜半木星宿度:娄 1.3226 度。

夕伏:

中积 470.6424。

中星 118.3999。

入历度 387.5609。

盈缩历 22.3034(盈初)。

盈缩差 2.2753(盈)。

定积 107.6752。

定日 22.3427(丙戌)。

定星 120.6752。

加时定星 129.6331 度。

所入月日：三月十一日(9.6759)。

入月经朔 12.6668(丙子)。

加减定分：定日小余 $\times$ 初行率  $0.22=0.0754$ 。

夜半定星 129.5577 度。

三月丙戌夜半木星宿度：娄 7.9902 度。

合伏：

中积 487.5024。

中星 122.2599。

入历度 390.4909。

盈缩历 25.2334(盈初)。

盈缩差 2.5468。

定积 124.8067(盈加)。

定日 39.4742(癸卯)。

定星 124.8067。

加时定星 133.7646。

所入月日：四月二十八日(26.8074)。

入月经朔 12.6668(丙子)。

加减定分：定日小余 $\times$ 初行率  $0.23=0.1091$ 。

夜半定星 133.6555 度(顺减)。

四月癸卯夜半木星宿度：娄 12.0880 度。

各动态段的定星即该段初日木星所在黄道位置距冬至点的角距。经过加减定分改正(顺减退加)就得到该段初日子夜的黄道位置。黄经自春分点自西向东量度。冬至点的黄经为  $270^\circ$ ，将授时历计算得到的木星每段初日夜半的黄道位置化为  $360^\circ$  制，内减  $90^\circ$ ，即授时历推算所得木星黄经。将它们与用现代方法计算得出的木星黄经比较，就可看出授时历推步的精确度。

结果如表 10—31 所示。

表 10-31 授时历计算元大德三年至四年木星位置的精度

段 目	初 日	干支	木星实黄经(°)	授时推步(°)	相差(°)
合伏	1299.3.12	辛酉	356.2	356.4	-0.2
晨疾初	1299.3.29	戊寅	0.3	0.5	-0.2
晨疾末	1299.4.26	丙午	6.7	6.9	-0.2
晨迟初	1299.5.24	乙亥	12.3	12.9	-0.6
晨迟末	1299.6.22	癸卯	16.8	17.5	-0.7
晨留	1299.7.20	辛未	19.1	19.6	-0.4
晨退	1299.8.13	乙未	19.2	19.6	-0.4
夕退	1299.9.29	壬午	14.6	14.9	-0.3
夕留	1299.11.14	戊辰	9.8	10.0	-0.2
夕迟初	1299.12.8	壬辰	9.6	10.0	-0.3
夕迟末	1300.1.6	辛酉	12.0	12.0	0.0
夕疾初	1300.2.3	己丑	16.3	16.6	-0.3
夕疾末	1300.3.2	丁巳	22.0	22.3	-0.3
夕伏	1300.3.31	丙戌	28.7	28.9	-0.2
合伏	1300.4.17	癸卯	32.7	32.9	-0.2

授时历推步与用现代方法计算得出的黄经如此密合,最大相差仅为 $0^{\circ}.7$ ,各段动态亦与天相合。下面我们将要看出,由于授时历冬至点和合伏与天稍有偏失,实际上黄经误差要大些。

大德情况如此,那么到了明朝末年,授时历已行用了300余年,计算的木星位置和各段动态,情况又是怎样呢?为此,我们又计算了万历二十七年、二十八年(1599、1600)的木星历(表10-32)。邢云路《古今律历考》书中,也用授时历推算了万历二十七年、二十八年的木星的运动。他在木星的晨留、晨退、夕退、夕留等段选用的人历度与我们稍有不同。在其他几段,有时推算也略有差异。因而得出的夜半定星有时会出现 $0^{\circ}.1$ 的差别。表10-33列出授时历推步和用现代方法计算结果的比较。表中《古》表示《古今律历考》推步所得值。

计算显示,授时历推步明末万历己亥、庚子(1599、1600)木星位置,误差比元初大了。但最大误差仍仅 $0^{\circ}.6$ (《古今律历考》计算最大误差亦 $0^{\circ}.5$ ),不足 $1^{\circ}$ ,应该说,也还是比较精密的。

《明史·历志》记载,崇祯八年(1635)李天经推八月二十七日(10月7日)寅正二刻,木、火、月三曜同在张6度,而大统推木在张4度,火、月张3度。至期果同在张6度。我们用前面介绍的推步方法,采用大统历数据(去周岁消长)来计算验证崇祯八年是时的木星位置。计算的中间过程和结果列于表10-34中。八月二十七日寅正二刻处于晨疾末段17.7130日。晨疾末段初日八月初九丙戌(9月19日)晨前夜半定星240.9度,木星舍张宿 $0.8$ 度。由本段初日行分及日差,可得每日行度分秒。则18日共行3.5270度,19日共行3.7132度。即八月廿七日(10月7日)晨前夜半木星舍张宿4.327度,寅正二刻木星宿度为张4.365度。确如明史所书,“大统推木在张四度”。

八月二十七日寅正二刻的木星宿度也可这样得出:晨疾末段

表 10-32 万历二十七年己亥(1599)木星历(授时)

	合伏	展疾初	展疾末	展迟初	展迟末	展留	展退
中积	207.9678	224.8278	252.8278	280.8278	308.8278	336.8278	360.8278
中星	207.9678	211.8278	217.9378	223.4478	227.7578	229.6678	
入历度	110.4662	113.3962	118.0362	122.2262	125.5062	126.9562	
盈末历	72.1626 盈末	69.2326 盈末	64.5926 盈末	60.403 盈末	57.123 盈末	55.673 盈末	
盈缩差	5.6274	5.5191	5.3215	5.1166	4.9393	4.8563	
定积	213.5952	230.3469	258.1493	285.9444	313.7671	341.6841	0.4419
定日	15.6748	32.4265	0.2289	28.0240	55.8467	23.7637	47.7637
定星	213.5952	217.3469	223.2593	228.5644	232.6971	234.5241	
加时定星	218.2355	221.9872	227.8996	233.2047	237.3374	239.1644	
所入月日	六月二日	六月十九日	七月十七日	八月十六日	九月十三日	十月十一日	十一月六日
入月经朔	14.9220	14.9220	44.4526	13.9832	43.5138	13.0444	42.5750
入月日数	0.7528	17.5045	15.7763	14.0408	12.3328	10.7193	5.1887
加减定分	-0.1552	-0.0938	-0.0481	-0.0043	-0.1016		
夜半定星	218.0803	221.8934	227.8515	233.1984	237.2358	239.1644	
木星宿度	井 30.4328	柳 1.1059	柳 7.064	柳 12.411	星 3.4483	星 5.3769	
	己亥距元 318 年		中积 116147.0196 岁前		天正冬至 42.0796		
	庚子距元 319 年		中积 116512.2618 岁前		天正冬至 47.3218		

续表

	夕退	夕留	夕迟初	夕迟末	夕疾初	夕疾末	夕伏	合伏
中积	407.4078	453.9878	477.9878	505.9878	533.9878	561.9878	589.9878	606.8478
中星	224.7866	219.9053		221.8153	226.1253	231.6353	237.7453	241.6056
入历度	127.2850	127.6137		129.0637	132.3437	136.5337	141.1737	144.1037
盈末历	55.344 盈末	55.015 盈末		53.565 盈末	50.285 盈末	46.095 盈末	41.455 盈末	38.525 盈末
盈缩差	4.8371	4.8178		4.7308	4.5243	4.2413	3.9039	3.6786
定积	47.0027	93.5634	117.5634	145.4764	173.2699	200.9869	228.6495	245.2842
定日	34.3245	20.8852	44.8852	12.7982	40.5917	8.3087	35.9713	52.6060
定星	229.6237	224.7231		226.5461	230.6496	235.8766	241.6492	245.2839
加时定星	234.2496	229.3490		321.1720	235.2755	240.5025	246.2751	249.9098
所入月日	十二月 廿三日	二月十日	三月五日	四月三日	五月二日	五月三十日	六月廿七日	七月十五日
入月经朔	12.1056	11.1668	40.6974	10.2280	39.7586	39.7586	9.2892	38.8197
入月日数	22.2189	9.7184	4.1878	2.5702	0.8331	28.5501	26.6821	13.7863
加减定分	+0.0519			-0.0958	-0.1065	-0.0648	-0.2137	-0.1394
夜半定星	234.3015	229.3490		231.0762	235.1690	240.4377	246.0614	249.7704
木星宿度	星 0.514	柳 8.5615		柳 10.289	星 1.3815	张 0.3402	张 5.9639	张 9.6729
闰余	23.4023	天正经朔 18.6773		冬至日度 5.0392(赤) 箕 4.6403(黄)				
闰余	4.7468	天正经朔 42.5750		冬至日度 箕 5.0236(赤) 箕 4.6259(黄)				

表 10-33 授时历推算万历二十七年木星历与木星实位置的比较

段目	初日	干支	夜半实(°)	木星 授时(°)	黄经 《古》(°)	相差(°)
合伏	1599.7.23	己卯	120.8	120.4	120.4	0.4
晨疾初	8.9	丙申	124.5	124.1	124.1	0.4
晨疾末	9.6	甲子	130.5	130.0	129.9	0.5
晨迟初	10.4	壬辰	135.7	135.3	135.3	0.4
晨迟末	10.31	己未	139.5	139.2	139.2	0.3
晨留	11.28	丁亥	141.6	141.1	141.0	0.5
晨退	12.22	辛亥	141.5	141.1	141.0	0.4
夕退	1600.2.7	戊戌	136.8	136.4	136.4	0.4
夕留	3.24	甲申	132.1	131.5	131.6	0.6
夕迟初	4.17	戊申	131.9	131.5	131.6	0.4
夕迟末	5.15	丙子	133.8	133.2	133.2	0.6
夕疾初	6.12	甲辰	137.6	137.2	137.3	0.4
夕疾末	7.10	壬申	142.6	142.4	142.4	0.2
夕伏	8.6	己亥	148.2	148.0	148.0	0.2
合伏	8.23	丙辰	151.8	151.6	151.6	0.2



初日丙戌(22.4745)加时定星 240.998 度,木星舍张 0.9005 度。八月二十七日寅正二刻处于晨疾末 17.713 日。17 日共行 3.3398 度,18 日共行 3.5270 度。17.713 日共行 3.473 度。故是时木星宿度为张 4.37 度。

晨疾末段初日定星 236.68 度,即其时木星距冬至点的角距。经过加减定分 0.1 度的改正(顺减),得到初日丙戌夜半木星距冬至的角距,化为  $360^\circ$  制,减去  $90^\circ$ ,得到  $143^\circ.17$ ,为段初夜半木星黄经。与现代方法计算所得木星黄经  $143^\circ.9$ ,相差  $0^\circ.7$ 。根据大统历推步,初日夜半至八月二十七日寅正二刻相距 18.187 日,木星共行 3.56 度( $3^\circ.51$ ),得木星黄经  $146^\circ.68$ ,与现代计算木星黄经  $147^\circ.4$  的结果(表 10—30),也仅相差  $0^\circ.7$ 。但《明史》说,李天经用西法推,木、火、月同在张 6 度,大统推木在张 4 度,相差 2 度,至期,木、火、月果同在张 6 度。这是怎么回事呢?

《明史》说的张 6 度、张 4 度,是黄道距度,不是现代天文上说的黄经。古历所说的黄道距度,是指通过所测两天体的赤经圈与黄道相交两点间的弧长。它与自黄极过所测两天体的黄经圈与黄道相交二点的黄经差是不同的。过张宿一(张宿距星)作赤经圈,它与黄道的交点,在黄道上距春分点的弧长,称张宿一的黄道距度。过张宿一作黄经圈,它与黄道的交点(黄经圈与黄道交角为正交),距春分点的弧长,叫张宿一的黄经(自春分点向东计量)。它也等于过张宿一与过春分点的两个黄经圈之间在黄极的夹角。在明末时期,张宿一的黄经  $\lambda$  为  $150^\circ.82$ ,而张宿一的黄道距度  $\lambda'$  为  $141^\circ.27$ ,两者相差  $9^\circ.55(\lambda - \lambda')$ 。6 度化为  $360^\circ$  制为  $5^\circ.91$ ,4 度为  $3^\circ.94$ 。所以张 4 度、张 6 度的黄道距度分别为  $145^\circ.21$  和  $147^\circ.18$ 。

正好处在黄道上的天体,它的黄道距度  $\lambda'$  与黄经  $\lambda$  相同。五星中,木星的轨道倾角最小,仅为  $1^\circ$ ,基本上它在黄道内外  $1^\circ$  内运

表 10-34 崇禎八年(1635)木星历(大统)

	合伏	展疾初	展疾末	晨迟初	晨迟末	展留
中积	222.1824	239.0424	267.0424	295.0424	323.0424	351.0424
中星	222.1824	226.0424	232.1524	237.6624	241.9724	243.8824
入历度	124.7306	127.6606	132.3006	186.4906	139.7706	141.2206
盈末历	57.8982	54.9682	50.3282	46.1382	42.8582	41.4082
盈缩差	4.9825	4.8150	4.5271	4.2443	4.0085	8.9004
定积	227.1649	243.8574	271.5695	299.2867	327.0509	354.9428
定日	38.0699	54.7624	22.4745	50.1917	17.9559	45.8478
定星	227.1649	230.8574	236.6795	241.9067	245.9809	247.7828
加时定星	231.4834	235.1759	240.9980	246.2252	250.29g4	252.1013
加减定分	-0.0161	-0.1677	-0.0996	-0.0345	0.1147	
夜半定星	231.4678	235.0082	240.8984	246.1907	250.1847	252.1013
初日夜半	8月6日壬寅	8月22日戊午	9月19日丙戌	10月17日甲寅	11月13日辛巳	12月11日己酉
木星宿度	柳 10.6798	星 1.2207	张 0.8009	张 6.0932	张 10.0872	张 12.0038
度率	3.5409	5.8902	5.2923	3.9940	1.9166	

续表

*	合伏	晨疾初	晨疾末	晨迟初	晨迟末	晨留
日率	16.6925	27.7121	27.7172	27.7642	27.8919	
平行分秒	0.21210	0.21255	0.19094	0.14385	0.06870	
泛差		0.0212	0.0686	0.1222		
增减差		0.00424	0.01372	0.02444		
总差		0.00848	0.02744	0.04888		
日差		0.00032	0.00103	0.00183		
初日行分		0.2168	0.2047	0.1683		
末日行分		0.2083	0.1772	0.1194		
大统黄经	133°.9	137°.4	143°.2	148°.4	152°.3	154°.2
实黄经	134°.5	138°.0	143°.9	149°.1	152°.9	155°.0
相差	0°.6	0°.6	0°.7	0°.7	0°.6	0°.8
	距元 354	天正冬至	50.9050	闰应 1.5833	天正经朔	49.3218
	前合 176.6976	后合 222.1824	冬至日度	箕 4.6900(赤)	箕 4.3185(黄)	

动。它的黄经与黄道距度极为接近。所以根据木星的黄经可以判断木星所舍的黄道距度。

现代方法计算得出崇祯八年八月二十七日(1635年10月7日)寅正二刻木星、火星、月亮同位于黄经 $147^{\circ}.2$ 左右(表10-30)。张6度的黄道距度为 $147^{\circ}.18$ 。可知其时木、火、月三曜确皆位于张6度初。据此,以及崇祯七年闰八月末的木犯积尸气;表10-30显示的九月初四昏初的火土同度;九月初七卯正金土同度;九月十一日昏初金火同度等等。西洋新法推算的五星位置皆与天相合,是精确的。

张4度与张6度相差2度,实际上大统历推步是时木在张4.4度,而西洋新法计算,测验木在张6.0度,相差约1.6度。而前面介绍元大德三年至四年,明万历二十七年到二十八年木星授时、大统算例时说,元明推算的木星位置比较合天,至明末误差也仅约半度。这是由于我们将授时历、大统历计算得出的夜半定星化为黄经时,简单地假定授时历、大统历推步依据的春分点(冬至点),以及合伏定星都是合天的,在这个前提下,得到的结果。实际上,授时历、大统历冬至点的位置计算不太准确,约有 $0^{\circ}.3\sim 0^{\circ}.5$ 的误差。即真正的冬至点应在它们给出的西面约 $0^{\circ}.3\sim 0^{\circ}.5$ 之处。这使得出的黄经另外增加有约半度之差。但更重要的是合伏时太阳位置的误差。

合伏指太阳和木星处在同一黄经的位置和时间。授时历步五星以冬至点为基准点。根据所求年得出的平合日期、入历度,计算盈缩差改正,得到木星合伏的定积、定日、定星。定积是木星合伏时与其前冬至时刻间的日数,定星乃合伏时木星的黄道距度位置与冬至点之间的角距。合伏时日星同经,是时太阳的黄道距度是据日平行1度,由定积得出的。冬至的干支时刻加上定积就得出合伏时的日期、干支和时刻。这就是定日。授时历特别是大

统历,就取如此得出的太阳位置作为合伏时的木星位置。并以此为出发点,计算这一会合运动中任一段任一时刻的木星位置的。太阳运动有盈缩,并不严格按日行1度做平行运动。因此得出的合伏定星有误差。

合伏定星的误差包含两个方面。其一是由定积确定的合伏时间太阳并不正好在合伏定星的位置;其二,这时的太阳和行星黄经并不相同。就是说,是时实际上日星并未相合,并不是真正的合伏时刻。因此,根据合伏定星为基础推出的各动态段五星位置就难免有误差了。在我们计算的元大德三年(1299)、明万历二十七年(1599)、崇祯八年(1635)三组木星历中,真实太阳与合伏定星间约有 $1^\circ$ 、合伏时刻约有2日左右的误差。

李天经用西洋新法推崇祯八年八月二十七日寅正二刻木星在张6度(初,黄道距度为 $147^\circ.2$ ),与天象合。大统推木在张4度,其黄道距度就应该在 $145^\circ.2\sim 146^\circ.2$ 之间才对。

大统推是年8月6日壬寅日七刻(38.0699)木星合伏,日木同经,在冬至点东 $227.1649$ 度(定星)处。化为 $360^\circ$ 制,即日星位在冬至点以东 $223^\circ.895$ ,也就是黄经 $133^\circ.895$ 处。大统历就以这点为基础,推步得出每段每日的木星位置。但事实上,是年六月二十四日(1635年8月6日)壬寅日七刻太阳实黄经为 $132^\circ.87$ 。比大统历推得值小 $1^\circ.025$ 。就是说,大统历计算所得木星位置,要化为 $360^\circ$ 制,以黄经(对木星即黄道距度)来表示的话,除减 $90^\circ$ ,将冬至改为春分点计算外,还都应再减去 $1^\circ.025$ 。

大统历推得在晨疾末段初日,定星为 $236.6795$ 度。经过加减定分(顺减)的改正,晨疾末段初日夜半木星位于冬至点以东 $236.58$ 度。八月二十七日寅正二刻距初日夜半18.19日,这期间木星又向东走了 $3.56$ 度。与 $236.58$ 相加为 $240.14$ 度。化为 $360^\circ$ 制得 $236^\circ.686$ 。前面说过要以黄经表示需减去 $90^\circ$ (自春分点计量)、再

减去 $1^{\circ}.025$ ,得是时木星黄经为 $145^{\circ}.66$ 。前已得出,大统推八月二十七日寅正二刻木星在张 $4.4$ 度。张初度为 $141^{\circ}.27$ ,张 $4.4$ 度( $4^{\circ}.34$ )为 $145^{\circ}.6$ 。与西洋所得张 $6$ 度 $147^{\circ}.2$ ,确有 $1^{\circ}.6$ 之差。

至此,我们详细介绍了授时历、大统历推步木星的过程、方法,并讨论了计算的精度。在不考虑合伏定星误差情况下,授时历、大统历推得换算的木星位置元明两代与实黄经误差仅约半度,非常巧合。由太阳盈缩引起的合伏定星误差约为 $1^{\circ}$ 。考虑了这点以及冬至点误差,可得出元明两代计算木星的精度约为 $1^{\circ}\sim 2^{\circ}$ 。应该说还是比较准确的。

推步火、土、金、水四星的方法步骤与木星大致类似。为节省篇幅,不一一做实例计算了。邢云路《古今律历考》卷五十一至卷五十五,用授时历方法计算了万历二十七年(1599)的五星动态和位置,读者可以参看。为了给出授时历推步五星精确度的定量概念,我们用现代方法,计算了这一年的日月五星位置,并与之做了比较,结果分别列于表10-35至表10-38中。在将授时历计算结果换算成黄经值时,也做了简化处理,没有考虑因太阳盈缩引起的合伏定星约 $1^{\circ}$ 的误差。

计算显示,授时历推步土星位置误差约为 $1^{\circ}\sim 2^{\circ}$ ,也比较好。火星精度要比木、土为低,起伏较大,有 $\pm 3^{\circ}$ 左右,最大绝对误差可达 $5^{\circ}\sim 6^{\circ}$ 。水星、金星精度最低,起伏较大,绝对误差可达 $10^{\circ}$ 以上。起伏这么大,这和水星轨道倾角较大( $7^{\circ}$ ),黄经与黄道距度差异稍大也可能有点关系。金、水二星是内行星,附日而行。金星轨道几近圆形,不易测准它的近日点和计算它们的中心差等因素可能是造成误差较大的原因。

现代计算得出,授时历推得的万历己亥(1599)火星合伏时间与实际日星相合天象相差 $5.6$ 日;土星相差 $0.6$ 日;金星失天 $8.0$ 日;水星相差 $12.6$ 日。前面已给出木星相差约 $1.5$ 日。

表 10—35 万历己亥(1599)火星历(授时)精度

段目	初日	干支	火星		黄经	相差(°)
			实黄经(°)	授时历(°)		
合伏	1598.12.14	戊戌	260.2	262.1		-1.9
晨疾初	1599.3.8	壬戌	325.1	326.3		-1.2
晨疾末	5.27	壬午	26.8	28.3		-1.5
晨次疾初	7.25	辛巳	68.8	68.7		0.1
晨次疾末	9.11	己巳	99.5	97.6		1.9
晨迟初	10.22	庚戌	121.7	118.4		3.3
晨迟末	11.26	乙酉	135.1	131.6		3.5
晨留	12.23	壬子	138.4	135.9		2.5
晨退	12.31	庚申	137.7	136.1		1.6
夕退	1600.1.27	丁亥	129.6	125.8		3.8
夕留	2.23	甲寅	120.6	115.4		5.2
夕迟初	1600.3.2	壬戌	119.4	115.4		4.0
夕迟末	3.29	己丑	121.1	119.3		1.8
夕次疾初	5.3	甲子	132.5	132.1		0.4
夕次疾末	6.10	癸卯	151.3	151.3		0.0
夕疾初	7.25	丁亥	176.6	176.2		0.4
夕疾末	9.14	戊寅	209.5	208.8		0.7
夕伏	11.14	己卯	253.0	251.7		1.3

表 10-36 万历己亥(公元 1599 年)金星历(授时)精度

项目	初日	干支	火星	黄经	相差(°)
			实黄经(°)	授时历(°)	
合伏	1599.2.23	己酉	331.4	333.7	-2.3
夕疾初	4.3	戊子	19.9	22.5	-2.6
夕疾末	5.24	己卯	82.6	84.5	-1.9
夕次疾初	7.10	丙寅	139.3	140.1	-0.8
夕次疾末	8.20	丁未	187.4	188.9	-1.5
夕迟初	9.29	丁亥	231.5	232.7	-1.2
夕迟末	1599.11.2	辛酉	262.4	261.5	0.9
夕留	11.18	丁丑	271.1	255.7	5.4
夕退	11.23	壬午	272.3	265.7	6.6
夕退伏	12.4	癸巳	271.6	262.9	8.7
合退伏	12.10	己亥	269.2	258.9	10.3
晨退	12.16	乙巳	265.9	254.6	11.3
晨留	12.27	丙辰	259.8	251.1	8.7
晨迟初	1600.1.1	辛酉	258.0	251.1	6.9
晨迟末	1.17	丁丑	259.2	254.6	4.6
晨次疾初	2.20	辛亥	283.9	282.7	1.2
晨次疾末	3.31	辛卯	326.3	326.3	0.0
晨疾初	5.12	癸酉	14.9	15.9	-1.0
晨疾末	6.29	辛酉	72.2	73.5	-1.3
晨伏	8.18	辛亥	133.3	141.1	-7.8



表 10-37 万历己亥(1599)土星历(授时)精度

段目	初日	干支	土星		黄经	相差(°)
			实黄经(°)	授时历(°)		
合伏	1599.10.13	辛丑	199.2	200.8		-1.6
晨疾	11.2	辛酉	201.8	203.0		-1.2
晨次疾	12.3	壬辰	205.0	206.2		-1.2
晨迟	1600.1.1	辛酉	207.4	208.8		-1.4
晨留	1.27	丁亥	208.4	210.3		-1.9
晨退	2.26	丁巳	208.2	210.3		-2.1
夕退	4.18	己酉	205.0	206.1		-1.1
夕留	6.10	壬寅	202.0	203.1		-1.1
夕迟	7.10	壬申	202.0	203.1		-1.1
夕次疾	8.5	戊戌	203.2	204.5		-1.3
夕疾	9.3	丁卯	205.5	207.1		-1.6
夕伏	10.3	丁酉	208.7	209.9		-1.2

表 10-38 万历己亥(1599)水星历(授时)精度

段目	初日	干支	水星	黄经	相差(°)
			实黄经(°)	授时历(°)	
合伏	1598.12.27	辛亥	267.1	272.1	-5.0
夕疾	1599.1.13	戊辰	294.6	303.9	-9.3
夕迟	1.28	癸未	320.5	324.7	-4.2
夕留	2.9	乙未	337.6	334.5	3.1
夕退伏	2.22	戊申	336.4	327.2	9.2
晨留	3.5	己未	326.8	319.7	7.1
晨迟	3.7	辛酉	326.1	319.7	6.4
晨疾	3.19	癸酉	330.2	328.5	1.7
晨伏	4.3	戊子	347.0	349.5	-2.5

大统历不用授时历消长之法。我们用授时历“周岁消长,百年各一”方法,推步崇祯八年木星历。天正冬至黄道日度比大统约小 $0.2$ 度,即授时冬至点在大统历西约 $0.2$ 度处。木星各段初日定星比大统约大 $0.11$ 度,夜半定星和木星宿度约少 $0.09$ 度。差别主要是由天正冬至黄赤道日度差引起的。

## 第十节 弧矢割圆术与步中星

### 一、句股测望和弧矢割圆术

《明史·历志·大统历法·法原·句股测望》说:

北京立四丈表,冬至日午正测得景长 $798.5$ 寸。随以简仪测到太阳南至地平 $26.465$ 度,为半弧背 $s$ 。求得矢度 $v5.915$ 度。北京去戴日下之度为周天半径 $r60.875$ 度内减矢 $5.915$ ,得 $54.96$ 度,为股 $q$ 。弦为 $r$ 。用句股算术求得句 $26.1756$ 度,为日出地半弧弦。

1035

北京立四丈表,夏至日午正测得景长 $117.1$ 寸。再以简仪测到太阳南至地平 $74.265$ 度,为半弧背。用割圆求矢术,求得矢度 $43.7425$ 度,周天半径内减矢度,余 $17.1325$ 度为句,乃本地去戴日下之度。以句弦别股术,求得股 $58.455$ 度,为日出地半弧弦。

以二至日度相加得 $100.73$ 度,折半得 $50.365$ 度,为北京赤道出地度。所以北京北极出地度为周天象限内减赤道出地度 $(91.314375-50.365)$ ,余 $40.949375$ 度。即北京地理纬度。

以上参见法原二至出入差图。

弧矢割圆术:

周天径 $121.7525$ 度(用 $121.75$ ),半径 $60.875$ 度。又为黄赤道大弦。二至黄赤道内外半弧背 $24$ 度(所测就整)。因周天度

365.2575 度,用圆周率  $\pi=3$  除之得周天直径  $d121.7525$  度,半径  $r60.875$  度。

根据沈括会圆术:

半弧背  $s$ =半弧弦  $p$ +二至黄赤道弧矢  $v/d$

由句股算术有:

$$d=v+p^2/v$$

两式中消去  $p$ ,得:

$$v^4+(d^2-2sd)v^2-d^3v+s^2d^2=0$$

用贾宪增乘开方法解之,求得矢度  $v$  的一个正根为

(式中  $s$  即二至黄赤道内外半弧背 24 度):

$$v=4.8482 \text{ 度}$$

$$\text{黄赤道大股 } q=r-v=56.0268 \text{ 度}$$

$$\text{黄赤道大句(半弧弦) } p=\sqrt{dv-v^2}=23.8070 \text{ 度}$$

由半弧背  $s$ ,用  $v^4+(d^2-2sd)v^2-d^3v+s^2d^2=0$ ,求弧矢  $v$  的方法,称割圆求矢术。

大统历法原中给出的割圆求矢术,即上述方程的具体解法。

## 二、布黄赤道相求弧矢诸率立成法

授时历创建弧矢割圆术。由此可推算黄赤道积度、黄赤道差、黄赤道内外度、去极度、日出入、昼夜时刻等。授时历经给出有“黄赤道率”、“黄道出入赤道内外去极度及半昼夜分”二立成。大统历志法原载有“黄赤道相求弧矢诸率立成”、“黄道每度去赤道内外及去北极立成”及“黄道每度昼夜刻立成”、“冬夏二至后晨昏分立成(所载乃南京应天府晷刻)”等立成表。本节介绍在黄赤道相求各立成中有关弧矢诸率的推步方法。

### 1. 黄道各度下求赤道积度

黄赤道小弦=周天半径  $r$ —黄道矢度。各度下黄道矢度由前

述割圆求矢术(即解割圆求矢方程)得出。周天半径  $r = 60.875$  度。

黄赤道小股 = 黄赤道小弦  $\times (r - \text{二至黄赤道弧矢 } v) / \text{黄赤道大弦 } r$ 。其中二至黄赤道弧矢  $v = 4.8482$  度。 $r - v = 56.0268$  度, 即黄赤道大股  $q$ 。

黄道半背弦差 = 黄道矢度<sup>2</sup> / 周天全径  $d$ 。周天全径  $d = 121.75$  度。

黄道半弧弦 = 黄道积度(即黄道半弧背、弧长) - 黄道半背弦差。

黄道积度已知。

赤道小弦 =  $[(\text{黄道半弧弦})^2 + (\text{黄赤道小股})^2]^{\frac{1}{2}}$ 。

赤道半弧弦 =  $r \times \text{黄道半弧弦} / \text{赤道小弦}$ 。

赤道横大句 =  $r \times \text{黄赤道小股} / \text{赤道小弦}$ 。

赤道横弧矢 =  $r - \text{赤道横大句}$ 。

赤道半背弦差 = 赤道横弧矢<sup>2</sup> /  $d$ 。

赤道积度 = 赤道半弧弦 + 赤道半背弦差。

度率为相邻积度之差。

黄赤道差 = 黄道积度 - 赤道积度。

由此可以得出,“黄赤道相求弧矢诸率立成”和授时历经之“黄赤道率”表。后者称“黄道矢度”为“积差”。相邻“黄道矢度”之差,前者称“黄道矢差”,后者叫“差率”。

## 2. 推黄道各度,距赤道内外及去极远近术

赤道二弦差 =  $r - \text{赤道小弦}$ 。赤道二弦差又称黄赤道小弧矢、内外矢、股弦差。

黄赤道小弦 =  $r - \text{黄道矢度}$ 。黄赤道小弧弦 = 二至黄赤道内外半弧弦(23.71度)  $\times \text{黄赤道小弦} / \text{黄赤道大弦}(r)$ 。即黄赤道内外半弧弦,又为黄赤道小句。

半背弦差 =  $[\text{黄赤道小弧矢}(\text{赤道二弦差})]^2 / d$ 。

黄赤道内外度 = 黄赤道小弧弦 + 半背弦差。黄赤道小弧半背, 即黄赤道内外度。

太阳去北极度分 = 象限度  $91.314375 \pm$  黄赤道内外度。盈初缩末限为加, 缩初盈末限为减(夏至前后)。

这样就可以布“黄道每度去赤道内外及去北极度立成”。

### 三、里差刻漏和求黄道每度昼夜刻

推算日出入和昼夜时刻是中历步晷漏中星术的主要内容。授时历创用弧矢割圆法对推步日出入时刻也有很大发展。

#### 1. 求二至差股及出入差

由北京北极出地  $40.95$  度, 根据割圆弧矢法, 可求得出地半弧弦为  $39.26$  度, 为大三斜中股。实测得到二至黄赤道内外度  $23.90$  度为弧  $s$  (割圆弧矢术中称半弧背)。以前述方法可推得内外半弧弦  $23.71$  度, 又为黄赤道大句, 又为小三斜弦。参见“二至出入差图”(图见《明史·历志》)。

以内外半弧弦为句, 半径  $r$  为弦。依句股算法, 得股  $56.068$ 。以股转减半径  $r$ , 余  $4.81$  度为二至出入矢, 即黄赤道内外矢。

夏至, 日南到地平  $74.265$  度为半弧背(弧长  $s$ )。依前法, 求得日下至地半弧弦  $58.45$  度。由相似句股形关系, 大三斜中股(北京北极出地半弧弦)  $39.26 \times$  二至内外半弧弦  $23.71$ , 以半径  $60.875$  (大三斜中弦) 为法除之, 得  $15.29$  度, (为小三斜中股, 又为小股。置小股  $15.29$  度) 去减日下至地半弧弦  $58.45$  度, 余  $43.16$  度为大股。以出入矢  $4.81$  度, 去减半径  $60.875$  度, 余  $56.068$ , 为大股弦。

由相似句股形关系, 可得出: 二至出入差半弧弦 = 大股弦  $56.068 \times$  小股  $15.29 /$  大股  $43.16 = 19.87$  度, 为小弦。

根据会圆术、句股法, 已知二至出入差半弧弦  $p$ , 可求出二至出入差半弧背  $19.9614$  度。以二至黄赤道内外半弧弦  $23.71$  度

除之,得 84.19 分(0.8419 度)为度差分。

## 2. 求黄道每度昼夜刻

每度出入差并弧背=所求度黄赤道内外半弧弦 $\times$ 二至出入差半弧背 19.9614 度/二至黄赤道内外半弧弦 23.71 度=黄赤道内外半弧弦 $\times$ 度差 0.8419 度。

日行百刻度 $=2\times(r60.875\text{度}-\text{黄赤道内外矢})\times3+1\text{度}=3\times(d121.75\text{度}-2\times\text{黄赤道内外矢})+1\text{度}$ 。黄赤道内外矢,即赤道二弦差。

出入差刻=所求度出入半弧背 $\times$ 100 刻/日行百刻度。

半昼刻=25 刻 $\pm$ 出入差刻。黄道在赤道内(太阳赤纬为正)用加号,在赤道外(太阳赤纬 $\delta$ 为负)用减号。

昼刻 $=2\times$ 半昼刻。

夜刻 $=100\text{刻}-\text{昼刻}$ 。

## 3. 黄赤道差、太阳去极、昼夜刻计算例

现计算冬至后黄道积度 40 度(括号内数值为 44 度)的赤道积度、黄赤道差、太阳去极度及昼刻夜刻。先根据前述的割圆求矢术,已知黄道积度 $s40\text{度}(44\text{度})$ ,求黄道矢度 $v$ ,解方程式

$$v^4 + (d^2 - 2sd)v^2 - d^3v + s^2d^2 = 0$$

式中 $d=121.75\text{度}$ 。得出黄道积度 $s40\text{度}(44\text{度})$ 的黄道矢度 $v=13.6889\text{度}$ (黄道积度 $s44\text{度}$ 的黄道矢度 $v=16.5682\text{度}$ )。 $r=d/2$ 。

黄赤道小弦 $=r-\text{黄道矢度}=47.1861(44.3068)\text{度}$ 。

黄赤道小股 $=\text{黄赤道小弦}\times(r-\text{二至黄赤道弧矢 } 4.8482)/\text{黄赤道大弦 } r=43.4281(40.7782)\text{度}$ 。

黄道半背弦差 $=\text{黄道矢度}^2/\text{周天全径 } d=1.5391(2.2546)\text{度}$ 。

黄道半弧弦 $=\text{黄道积度}-\text{黄道半背弦差}=38.4609(41.7454)\text{度}$ 。

赤道小弦 $=[(\text{黄道半弧弦})^2+(\text{黄赤道小股})^2]^{\frac{1}{2}}=58.0107$   
(58.3569)度。

赤道半弧弦 $=r \times \text{黄道半弧弦} / \text{赤道小弦} = 40.3599(43.5467)$ 。

赤道横大句 $=\text{黄赤道小股} \times r / \text{赤道小弦} = 45.5724$   
(42.5378)度。

赤道横弧矢 $=r - \text{赤道横大句} = 15.3027(18.3373)$ 。

赤道半背弦差 $=\text{赤道横弧矢}^2/d=1.9234(2.7618)$ 。

赤道积度 $=\text{赤道半弧弦} + \text{赤道半背弦差} = 42.2832$   
(46.3085)度。

度率 $=\text{相邻积度之差} = 1.0126(1.0027)$ 度。

黄赤道差 $=\text{黄道积度} - \text{赤道积度} = 2.2832(2.3085)$ 度。

赤道二弦差 $=r - \text{赤道小弦} = 2.8643(2.5181)$ 度。

黄赤道小弦 $=r - \text{黄道矢度} = 47.1681(44.3068)$ 度。

黄赤道小弧弦(内外半弧弦) $=\text{二至黄赤道内外半弧弦} 23.71 \times$   
 $\text{黄赤道小弦} / r = 18.3783(17.2569)$ 度。

半背弦差 $=\text{赤道二弦差}^2/d=0.0674(0.0521)$ 。

黄赤道内外度 $=\text{黄赤道小弧弦} + \text{半背弦差} = 18.4456$   
(17.3089)度。

太阳去北极度分 $=\text{象限度} 91.314375 \pm \text{黄赤道内外度}$ 。冬至  
前后(盈初缩末限)去极度 $=109.7599(108.6232)$ 。夏至前后(缩  
初盈末限)去极度 $=72.8687(74.0054)$ 。

出入半弧背 $=\text{黄赤道内外半弧弦}(\text{黄赤道小弧弦}) \times \text{二至出}$   
 $\text{入差半弧背} 19.9614 \text{度} / \text{二至黄道赤道内外半弧弦} 23.71 \text{度} =$   
 $15.4726(14.5285)$ 度。

日行百刻度 $=2 \times (r - \text{赤道二弦差}) \times 3 + 1 = 349.0642$   
(351.1414)度。

出入差刻 $=\text{出入半弧背} \times 100 / \text{日行百刻度} = 4.4326 \text{刻}$



(4.1375 刻)。

半昼刻=25 刻—出入差刻=20.5674(20.8625)刻。因为冬至后 40 度(44 度),黄道在赤道外,太阳赤纬  $\delta$  为负,故用减。如为夏至后 40(44)度,或夏至前 40(44)度,黄道在赤道内,太阳赤纬为正,则用加。

昼刻=2×半昼刻=41.1348(41.7250)刻。

夜刻=100—昼刻=58.8652(58.2750)刻。

#### 四、步中星——求每日日出辰刻

授时历步中星,给出的昼夜刻分,乃大都北京之晷漏。

大都北极出地 40 度太强。

冬至太阳去极 115.2173 度。

夏至太阳去极 67.4113 度。

冬至昼、夏至夜长 0.381592 日。

夏至昼、冬至夜长 0.618408 日。

昏明(晨昏蒙影)0.0250 日。

##### 1. 求每日黄道出入赤道内外度、去极度

将所求日晨前夜半  $0^h$  黄道积度,如大于半负周,去之。如在象限度以下,为初限;以上,复减半岁周,余数为入末限。根据初末限整数度数查“黄道出入赤道内外去极度及半昼夜分”立成表。小数部分以其段内外差乘之,所得积,用来减表列的内外度,即得所求日、子正出入赤道内外度。太阳在赤道内者(夏至前后、缩初盈末限)减,太阳在赤道外者(冬至前后、盈初缩末历)加象限度,即得所求日太阳去极度及分秒。

##### 2. 求每日半昼夜及日出入晨昏分

根据前面得出的所求日入初末限,按整数度查表,小数部分以昼夜差乘之,将所得结果加减其段的半昼分、半夜分,即得所求日之半昼、半夜分。表列数值前大后小者用减,前少后多者用加。

日出分=半夜分

日入分=日周一日出分

晨分=日出分-昏明分

昏分=日入分+昏明分

3. 求昼夜刻及日出入辰刻

夜刻=2×半夜分/100

昼刻=100刻-夜刻

将日出入分化为时辰初、正、刻、分，即得日出入辰刻。

4. 求更点率及更点所在辰刻

更率=晨分×2/5

点率=更率/5

将所求更点数，以更点率乘之，加其日昏分，化为时辰初正刻分，即得所求辰刻。

5. 求距中度及更差度

距中分=半日周一其日晨分

距中度=距中分×366.2575度/日周10000

更差度分=2×(183.12875度-距中度)/5

6. 求昏明五更中星

初更中星=其日午中赤道日度+距中度

初更中星，即昏中星所临宿次。以更差度分累加，满赤道宿次支之，为逐更及晓(旦)中星宿度及分秒。

各地所在昼夜刻分及中星诸数，皆可据各地北极出地度数(纬度)推算出来。

7. 求各地所在漏刻

在各地以仪测验或下水漏，测量定出其他冬至、夏至夜刻，与50刻相减，余为至差刻。即：至差刻=50刻-冬(夏)至夜刻。所求夜刻=50刻±至差刻×所求日黄道去赤道内外度分×10/239。太阳在赤

道内(赤纬为正)用减,太阳黄道在赤道外用加。昼刻=百刻一夜刻。

至于日出入辰刻以及更点等数值,皆可依上述方法得出。

## 五、求定差、距差、定限度

授时历称月亮的降交点为正交,升交点为中交。即白道和黄道的两个交点。白道由北向南穿过黄道名正交,由南到北曰中交。当月球轨道的升交点或降交点正好位于冬至或夏至点时,白道与赤道的交点距二分点为最大 14.66 度。若黄白交点不在二至点上,那么赤白交点距二分点小于 14.66 度。

定差=初末限 $\times$ 14.66 度/象限

距差=14.66 度一定差

定限度=98 度 $\pm$ 黄赤道内外半弧背 24 度 $\times$ 定差/14.66

正交在冬至后为减,夏至后为加。距差表示白赤交点距黄赤交点(二分点)的角度,定差指白赤交点距二分点角度,小于极差 14.66 度的差值;初末限是月球正交点与二至点的黄道距度。初末限如等于象限数,则定差为 14.66 度而无距差;若月正交正当二至,初末限为 0,则距差为极差 14.66 度而无定差。所以距差是距二分点的度差,定差是因黄白交点距二至点引起的差。定差若满 14.66 度,由上式看出,加减差满 24 度,这时正交正当二分点,黄白赤三道交于一点。半交正当二至。若月正交点正当二至,那时定差为零,亦即没有加减差。

若月正交在春分点,那么它的定差为 14.66 度,减差为 24 度,它的定限度为 74 度。若月正交在秋分点,定差为 14.66 度,加差为 24 度,它的定限度是 122 度。这个数值是月道半交去极度数。月正交若在二至点,那时既无定差,又无加减差,它的定限度为 98 度。98 度乃象限度与赤道外 6 度有奇之和,是月道出入黄道度加入赤道去极度之数。

## 参考文献

- [1] 朱文鑫. 历法通志. 上海: 商务印书馆, 1934.
- [2] 邢云路. 古今律历考. 上海: 商务印书馆, 1936.
- [3] 铃木敬信. 日食与月食. 东京: 恒星社, 1936.
- [4] H. M. Nautical Almanac Office. Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris. London: Her Majesty's stationery Office, 1974.
- [5] 戴内清. 中国的天文历法. 东京: 平凡社, 1975.
- [6] 中华书局编辑部. 历代天文律历等志汇编. 北京: 中华书局, 1976.
- [7] Danjon, A. 球面天文学和天体力学引论. 李珩, 译. 北京: 科学出版社, 1980.
- [8] 潘鼎, 向英, 郭守敬. 上海: 上海人民出版社, 1980.
- [9] 中国科学院自然科学史研究所. 钱宝琮科学史论文选集. 北京: 科学出版社, 1983.
- [10] 苗永宽. 球面天文学. 北京: 科学出版社, 1983.
- [11] 陈遵妫. 中国天文学史(第三册). 上海: 上海人民出版社, 1984.
- [12] Montenbruck, O. Practical Ephemeris Calculations. New York, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1989.
- [13] 曲安京, 纪志刚, 王荣彬. 中国古代数理天文学探析. 西安: 西北大学出版社, 1994.
- [14] 陈久金. 陈久金集. 哈尔滨: 黑龙江教育出版社, 1993.
- [15] 陈美东. 古历新探. 沈阳: 辽宁教育出版社, 1995.

## 总 跋

《中国天文学史大系》(以下简称《大系》)的研究和编著计划,创意于20世纪70年代末、80年代初。

早在20世纪70年代后期,在中国科学院的直接领导下,组织有一个中国天文学史整理研究小组,小组的成员分别来自北京天文台、紫金山天文台、南京大学天文系、北京天文馆和自然科学史研究所。这个小组的主要任务是编著一部《中国天文学史》。为了把天文学史的整理研究工作引向深入,小组还编辑了《中国天文学史文集》(1~3辑,科学出版社出版于1978、1981和1984年)、《科技史文集·天文学史专集》(1~4辑,上海科学技术出版社出版于1978、1980、1983和1992年)<sup>①</sup>。

1045

1978年,《中国天文学史》书稿编著完成,交付科学出版社出版。当此之时,中国天文学史整理研究小组的同志们觉得历史上遗留下来的中国天文学史资料浩如烟海;中国天文学的历史发展也极其丰富多彩,既是整个中国文化史上一个富有特色的部分,也是世界科学史上一个极具魅力的部分。已经完成的《中国天文学史》一书虽然达到了一定的深度,在当代中国天文学史众多的出版物中是一部具有较强学术性的综合性专著。但是,总的说来,该书作者们认为,限于篇幅,也限于时间和条件,许多问题总觉得言犹未尽,全书的规模也不能与真实历史的瑰丽多姿相匹

---

<sup>①</sup> 第4辑编成于1984年,时中国天文学史整理研究小组已经解散,只因出版社为了保持一定的连续性,编者的名字不宜改得太突然,故仍使用了该小组的落款。至于到1992年始克出版,这是由于种种复杂而可理解的原因所致,在此不赘。

配。为此,自1979年起,人们开始思索:是否有可能编著一部与中国天文学的悠久历史和广阔内涵相适应的中国天文学史著作?商议的结果便是《大系》构想的诞生。时在1979年冬。

以后,此构想在全国天文学史界用多种方式征询意见,获得全国天文学界同行的鼓励和支持,构想日渐成熟。

1983年4月,中国天文学史整理研究小组解散,但为了部署今后的中国天文学史研究工作,中国科学院原数理学部在宣布解散该小组的同时,召开了《大系》的工作会议。会上确定了整个《大系》有16个子项目,这些子项目由7个归口单位分工负责。同时确定了以中国科学院自然科学史研究所为主编会议的召集单位。

此后,由于种种原因,主编会议虽开过多次,但核心的问题——科研经费一事却始终无法解决。因此,工作始终无法具体落实。这中间虽曾获得一笔国家自然科学基金会的资助,但数额极其有限,整个《大系》工作,仍无法启动。

时间一晃,过了7年,此时得到了两个意外的支持。其一,由于学术界老前辈、自然科学史界的泰斗之一——钱临照院士的关怀和过问,中国天文学界的老前辈王绶琯院士、叶叔华院士的鼎力支持,中国科学院数理化学局给予了经费支持,同时,该局的天文处通过天文委员会的同意也提供了部分经费。《大系》由此得到了启动的科研经费。其二,河北科学技术出版社在省新闻出版局领导的支持下,积极支持大型的、有重大科学意义的著作出版。他们知道了《大系》的编著计划后即向省新闻出版局申请了一笔专项出版基金,总数达70万元之巨。《大系》的著述计划得到了这两项强有力的支持后,遂于1990年秋,在北京召开了工作会议,重新调整的子项目为15个(原定16个子项目的负责人中已有一位英年早逝,一位患中风,无力再承担繁重的工作),组织起新的工作机构班子,于1991年经费到位后开始工作。

整个计划原定1993年完成,1995年书出齐,但由于种种复杂的原因,直到1997年7月编著工作才基本结束,这中间还包括了两项子课题的调整精减。最终完成的是一部13个子课题的《大系》。当然,作为一件科学作品而言,主持人总觉得有所缺憾,有所不满足。但是,既然主客观条件只能允许做到现在的程度,那么,我们也只能实事求是地来承认这个事实,并从客观现实的情况出发来评价这个事实。

第一,《大系》是迄今为止中国天文学史著作中部头最大的一部,其所涉及的深度和广度有许多都超过了以往的有关作品。例如,《中国少数民族天文学》、《中国古代天文机构与天文教育》、《中国古代天文学词典》等,这些卷的内容过去从未有过完整而系统的研究和著述。这是《大系》的特有产品<sup>①</sup>。

第二,《大系》中其他各卷的内容或多或少,都有前贤们作过探究,但这次聘任的有关各卷主编,均系对各自的课题有过长期研究,多有心得的。在《大系》中他们都作出了最大的努力,即使如古代天文学思想、历法等这类古老的课题,也都有大量超乎前人的发现。至如星占术这一课题,自20世纪80年代以来受到著述家的诸多偏爱。但究其竟,大多为非天文学家的作品,对星占术的研究往往只限于社会学、历史学方面的考虑,而对星占术本身的来龙去脉、结构、原理往往无暇涉及。《大系》中的《中国古代星占学》则弥补了以往学术界的不足,深入到星占术本身的深层结构,剖析了星占术本身的发生、发展和结构、原理,从而为这一方面的研究向学术界提供了一个可靠的基础。又如,关于中国近现代天文学史,过去著述极少,只有以往陈展云、陈遵妫两位天文

1047

<sup>①</sup> “天文机构与天文教育”卷是最早交稿的(1994年),此后,我们发现在台北市出版了一部讨论天文机构,主要是中央机构的专著。但是,有关天文教育的内容仍未见有系统性的专著问世。

学界前辈曾作系统的著述。但陈展云先生的作品是内部出版物，传世极其稀少，今已难见到。陈遵妫先生则是在其专著《中国天文学史》第四册辟有第十篇共9章17万余字来论述这一课题。陈先生是中国现代天文学发展的亲身参加者，其文多有珍贵史料。但无可讳言，其中也有若干出自回忆和传闻。待考之处，在所难免。《大系》中这一课题的主编苗永宽先生，学风极其严谨，断事行文每每必据可靠之档案文献，不可靠的传闻则必摒弃。故其总的篇幅或虽稍少于陈遵妫先生之书，但也每多可以引为参考，或补陈书所不足。至若《大系》其他各卷之长处，读者明智，自有鉴别，也勿庸我们多饶舌自夸。

第三，如同任何事物一样，《大系》自然也是一分为二的。由于种种原因，《大系》还有各种不足。首先，取消了两个子课题，这样一来，“中国天文学史导论”卷的删除，使《大系》缺少了一个总的理论框架和经验总结，并且原定的“中国天文学的起源”和“中国天文学在国外”两卷，也因故而取消，这是非常可惜的事。至于另一个子课题“中国天文文献史料学”一卷，则是属锦上添花的工作，它的被删除虽也有点可惜，但好在整个《大系》已是花团锦簇，暂缺这一项留待他日补裁也不为大害。

其次，由于本人才疏学浅，加之20世纪90年代以来又复疾病缠身，故对《大系》之学术编辑和加工的力量极其不足，于是许多卷的学术编辑加工仍只得依靠各位主编本身，致使这部由数十人参加编纂的巨著，总不免有互相抵牾各卷中疏漏差错之处也有多寡不等的存在。虽然这一切可以诿之于文责自负，但却给读者带来一些困惑和烦恼。这是作为我本人主其事者所最为不安于心的。在此我们不敢企求读者的原谅，而只是希望读者能严肃而具体地予以批评。这对我们固然是巨大的帮助，而且对整个中国天文学史的工作也是一种促进和帮助。



可以理解的是:像《大系》这样规模巨大的科研、著述工程,自始至终必须有许多单位和个人的大力支持,始克有成。虽然开列一份感谢的名单将会非常困难,但我们总觉得不见诸笔端,内心感到不安,特别有许多老同志,已退休有年,但他们的支持我们是决不能忘怀的。

为《大系》提供研究经费的单位有:中国国家自然科学基金会;中国科学院数理化学局及天文处;中国科学院天文委员会;中国科学院自然科学史研究所。

在为《大系》争取或提供科研、著述经费活动中发挥了重大作用的个人有:

钱临照、叶叔华、王绶琯、钱文藻、李满园、刘佩华、王宜、苏洪钧、汪克敏、汲培文。

《大系》是一项由多系统、多单位参加的大型科研项目。这期间必然涉及大量复杂的科研组织、管理和协调工作,没有这些复杂的工作,《大系》的开展并完成是不可能的。就这一方面而言,《大系》始终依靠着中国科学院原数学部和改革后的数理化学局的领导。而在早期,数理化学部则是通过天文处来进行领导工作的。这期间天文处先后有李荣竞、唐廷友、沈海璋、王宜等为《大系》做过许多工作<sup>①</sup>。尤其是王宜,可谓伴随《大系》立项的始终,为《大系》的组织协调和经费支持,对上下左右做了大量工作,为《大系》排除了许多我们力所不能及的障碍和困难。

20世纪90年代数理化学局的李满园、刘佩华对《大系》作了全力的支持,经过他们的努力,《大系》项目成为中国科学院的一项重点科研项目。他们二位加上王宜和陈美东组成了《大系》工作的协调委员会。

---

<sup>①</sup> 上溯到1983年以前,中国天文学史整理研究小组的日常管理和领导工作,由数理化学部委托北京天文台代管。因此,当时有关的北京天文台的领导,尤其是负责业务领导的副台长洪斯溢,也曾为《大系》计划的形成和宣传贡献过他们的心力。

1983年以后,经数理学部委任,自然科学史研究所成为《大系》主编会议的召集单位,90年代以后,自然科学史研究所又是编委会主任的所在单位,因此,《大系》作为中国科学院的重点科研项目,自必成了自然科学史研究所历任所长和业务处长议事日程上经常要考虑、研究,并为之解决各种繁杂问题的一件大事。

对《大系》工作予以特别支持的历任所长是席泽宗、陈美东、廖克。其中前二位又是《大系》主编会议成员,他们作为主人,为《大系》出力是当然的。不过,必须指出的是,席泽宗在20世纪80年代曾作为主编会议的召集人,为《大系》工作的开展贡献了他自己的力量。陈美东为关键的90年代初的《大系》经费的获得作出了重要贡献。他还是数理化学局组织的监督《大系》经费使用的4人协调委员会成员之一。廖克则对《大系》给予了精神支持,在因各方面的原因使《大系》进度不及原计划时,他给予了理解和鼓励,使我这个项目主持人得以有勇气继续干到底。

自然科学史研究所的历任业务处处长、副处长黄炜、范楚玉、李家明、周嘉华、朱冰对《大系》给予了多方面的支持。吴晓峰也为《大系》后期的经费和上下协调工作方面作出了很多贡献。

至于其他许多有关单位的领导和个人的支持,我们在各卷的主编前言中都可以看到,我们在此也向他们一总致以深切的感谢。没有他们的支持和帮助,《大系》也是不可能完成的。

好了,书归正传,请明智的读者自己来阅读《大系》的正文,如果它能使您感到有所得,那是我们无上的荣光和欣喜;如果它使您感到有所失,那是我们最大的遗憾和不安。我们真诚地请求您给予严格的批评和指教。

《中国天文学史大系》编委会主任 薄树人

1997年7月于病榻上

## 补 记

薄树人先生的“总跋”是1997年于病榻上写成的。就在其后的两个月，他便走完了人生的最后里程，离我们远去，“总跋”竟成了一曲令人心碎的绝唱。它真实地记录了《中国天文学史大系》（以下简称《大系》）从提出设想到基本完稿的艰辛历程，也寄托了期待《大系》早日出版的殷切希望。

《大系》完全定稿的时间大约是1999年，我们这些还活着的参与者本以为可以顺利出版了，不曾想原来承诺出版《大系》的出版社因故将出版之事一拖再拖，期间，我们期待、焦虑、苦闷之情，难以言表。2006年7月，该出版社以退稿的方式中止了出版合同，这不啻是对我们的致命打击。面对困境，大家合力，起而求生，先后联系七八家出版社，可惜均无果而终。

1051

时光流逝，2006年11月终于迎来柳暗花明的时节。中国科学院自然科学史研究所廖育群所长到昆明开会，遇到中国科学技术出版社副社长吕建华先生，细细谈及了《大系》之事，吕先生对《大系》表示了很大的兴趣，愿意尽快研究出版的事；几乎与此同时，安徽教育出版社的杨多文先生到广州出差，向广东教育出版社副社长陈兵先生介绍了《大系》之事，陈先生也表示了很大兴趣，说可以考虑出版问题。我们对两家出版社怀有同样的感激之情。吕、陈两位都是基于《大系》乃是一个重要学术领域的原创之作的认识和出版社理当出版高水平学术著作的理念而作出判断的，这是出版家所独具的眼光和胸襟。他们对学术的推崇、他们的热情，给人以清新的气息，令人欣喜。

随后的发展,可以说是中国科学技术出版社和广东教育出版社之间的君子之争,这是大家都始料未及的。从出版意愿到完成全部选题审批的程序,两家都需要时间。此外,出版《大系》需要有较大的经费投入,对此必须有所筹措,而从经济实力上看,中国科学技术出版社不占优势。应该说,从办事的节奏上看,中国科学技术出版社要稍稍快一些,这给我们留下深刻的印象。2007年2月,中国科学技术出版社吕副社长与许英副总编率先正式提出了出版《大系》的具体而可行的设想。在征求了王绶琯院士及《大系》大部分作者的意见后,主要基于方便出版具体事项操作的考虑,我们选择了在北京的中国科学技术出版社,而对广东教育出版社表达了深深的敬意。

《大系》由中国科学技术出版社出版之事,得到了国家新闻出版总署有关部门领导的赞许,他们表示:如果书号有困难,可以向他们申请。《大系》中的《中国古代历法》、《中国古代天文学思想》与《中国古代星占学》3卷很快被选入《中国文库》第三辑。中国科学院国家天文台、中国科学院自然科学史研究所与广州市教育局还愿意继续执行当年购书的允诺。这些都是令人鼓舞的好消息。

自2007年3月开始,《大系》在中国科学技术出版社进入了紧张有序的出版作业,多年修就的善果贡献给读者的时日可待。我们需要感谢的各界贤达,除了薄先生在“总跋”中已提及者之外,自然还应包括上述诸位。

陈美东

2007年6月于北京

中  
国  
文  
库



ISBN 978-7-5046-5071-9



9 787504 650719 >

定价：57.00 元（全二册）

[General Information]

丛书名=

书名=中国古代历法 下

作者=张培瑜

出版社=北京市：中国科学技术出版社，2007.09

出版日期=2007.09

页数=1052

原书定价=57.00（全二册）

DX号=000007529913

SS号=12404239

ISBN=978-7-5046-5071-9

中图法分类号=P194.3（天文学、地球科学&gt;天文学&gt;时间、历法&gt;历法&gt;古代历法）

分类号=1401140403

主题词=古历法-研究-中国

参考文献格式=张培瑜等著.中国古代历法 下.北京市：中国科学技术出版社,2007.09.

简介=

封面

书名

版权

前言

目录

第一章 历表及表格计算法

第一节 中国古代历法发展概况

第二节 五星动态表

一、西汉至北魏时期的五星动态表

二、隋和唐初的五星动态表

三、唐大衍历及其后的五星动态表

第三节 二十八宿赤道和黄道宿度表

一、二十八宿赤道宿度表

二、二十八宿黄道宿度表

第四节 二十四节气太阳所在赤道宿度和昏旦中星表

一、二十四节气太阳所在赤道宿度表

二、二十四节气昏旦中星表

第五节 二十四节气晷长、昼夜漏刻和日出入时刻表

一、二十四节气晷长表

二、二十四节气昼夜漏刻表

三、二十四节气日出入时刻表

第六节 二十四节气太阳视赤纬表和月亮极黄纬表

一、二十四节气太阳视赤纬表

二、月亮极黄纬表

第七节 月离表和日躔表

一、月离表

二、日躔表

第八节 黄赤道、黄白道和赤白道度差表

一、黄赤道度差表

二、黄白道度差和赤白道度差表

第九节 五星运动不均匀性改正表

一、五星入气加減表

二、五星盈缩历

## 第十节 交食计算用表

- 一、推日应食不食和日不应食而食表
- 二、日食时差改正表
- 三、日食食分大小改正表
- 四、月食食分大小的节气改正表
- 五、食分与全部见食时间关系表
- 六、太阳天顶距大小与八尺表晷长关系表

## 第二章 历表的公式化

### 第一节 日食气差、刻差算式

- 一、五纪历和正元历日食食差算式
- 二、宣明历气差、刻差、加差算式及其对宋初历法的影响
- 三、崇天历及其后诸历法的气差、刻差算式

### 第二节 日月五星中心差算式

- 一、太阳中心差算式
- 二、月亮和五星中心差算式

### 第三节 交食时差算式

- 一、宣明历、崇玄历日食时差算式及其影响
- 二、纪元历及其后诸历法的交食时差算式

### 第四节 黄赤道、黄白道和赤白道度差算式

- 一、黄赤道度差算式
- 二、黄白道和赤白道度差算式

### 第五节 太阳视赤纬算式

- 一、崇玄历太阳视赤纬算式及其影响
- 二、纪元历太阳视赤纬算式

### 第六节 昼夜漏刻长度算式

### 第七节 晷长算式

- 一、崇玄历、仪天历、崇天历晷长算式
- 二、明天历和纪元历晷长算式

### 第八节 月亮极黄纬算式

### 第九节 交食初亏、复圆时刻算式

- 一、崇玄历和钦天历交食初亏、复圆时刻算式
- 二、崇天历交食初亏、复圆时刻算式及其影响
- 三、授时历交食初亏、复圆时刻算式



## 第十节 月食食既和生光时刻算式

一、崇天历、明天历、观天历月食食带食出入时刻算

二、纪元历、重修大明历、授时历月食食既和生光时刻算式

## 第三章 早期推步历法蠡测

第一节 观象授时与推步制定历法

第二节 《春秋》历日和日食

第三节 《左传》历日和杜预《春秋长历》

第四节 《春秋》《左传》历日分析

一、《左传》杂采各国史册、经传历日常有参差

二、《左传》所载日食，说法矛盾多端

三、《左传》所记日至朔闰常与鲁历不合，并大多失天

四、文公元年闰三月子虚乌有

五、《左传》有用周历解说《春秋》的痕迹

六、《左传》所书岁星位置均非其时实记

第五节 春秋鲁国历法

一、王韬的《春秋长历》

二、春秋鲁国的历朔推步

三、春秋鲁历的置闰和岁首

四、春秋鲁、晋历法的异同

第六节 古六历的创制行用时代

一、古六历是四分术行用于战国秦汉初

二、汉传六历有些数术并非战国之旧

第七节 六历法数与推步

一、六历法数

二、六历步法

三、六历算例

第八节 鲁历以闰余一之岁为郅首

第九节 元光历谱与汉初历法

第十节 秦与汉初历法不同

一、秦与汉初历法是不一样的

二、秦用颛顼历问题

第十一节 秦至汉初历法研究的新进展

## 第四章 太初历和三统历

## 第一节 太初历

### 一、关于太初改历的史料

### 二、太初改历真相

## 第二节 三统历

### 一、《三统历》序言

### 二、《三统历》术文

### 三、三统历《世经》

## 第三节 太初历和三统历的不同点

### 一、二十八宿体系

### 二、历元与上元

### 三、朔望月和回归年

### 四、冬至点的位置

### 五、两历比较小结

## 第五章 东汉四分历研究

### 第一节 东汉四分历的颁行、法数和发展

#### 一、基本法数和步术

#### 二、东汉四分历的发展和创新

### 第二节 太阳出没及步晷漏术

#### 一、漏刻随去极度差而增损

#### 二、四分历黄道去极度与气朔失天

#### 三、日中晷影和昼夜漏刻

### 第三节 昏旦中星和黄道赤道日度

### 第四节 步中朔、日月度及月食

#### 一、步中朔、日月度

#### 二、推月食术

#### 三、交食周期

#### 四、135月交食周期

### 第五节 月食出现的间隔时间与步术

#### 一、月食出现的间隔时间

#### 二、四分历应用周期推算月食的方法

### 第六节 行星运动和开普勒定律

#### 一、行星的视运动

#### 二、地心体系与日心体系

三、开普勒定律

四、轨道根数和星历表的计算

五、五星的地心运动

第七节 步五星术

一、基本法数

二、推五星合日术

三、五星会合周期内视运动

四、四分历推五星合日计算实例

第六章 魏晋南北朝历法

第一节 乾象历

一、减少斗分

二、过周分和近点月

三、月行迟疾与定朔计算

第二节 景初历

第三节 元嘉历和大明历

一、元嘉历

二、大明历

第四节 北朝历法概况

第七章 隋唐初历法大发展

第一节 日行盈缩的发现及在历法中的应用

第二节 张宾历和大业历

一、张宾历的基本用数

二、大业历

第三节 刘焯皇极历的创法

一、皇极历的基本用数和步法

二、皇极历日躔表及日行盈缩的计算

三、月离表及月行迟疾改正

第四节 初唐戊寅元历及月食步法

一、戊寅元历的颁行及校订

二、戊寅历法数

三、戊寅历步交会术

第五节 平朔定朔及天文实朔的计算

第六节 麟德历与定气定朔

一、麟德历的修撰与颁行

二、法数和定气定朔

第七节 会合运动和月平行速

第八章 大衍历

第一节 步中朔术

一、安排节气

二、安排朔日和闰月

三、推没、灭日

第二节 步发敛术

第三节 步日躔术

一、求太阳不均匀性改正值

二、黄赤道宿度换算

三、求每日太阳经度

第四节 步月离术

一、月亮不均匀性改正和定朔改正

二、黄白道经度换算

三、求月亮每日白道经度

第五节 步晷漏术

一、求阳城地区八尺表每日午中晷长

二、求每日漏刻

三、求每日黄道去极定数

四、求每日距中度定数

五、求九服所在每气气初中晷常数

六、九服所在昼夜漏刻

第六节 步交会术

一、求入交定日

二、求月亮黄道纬度

三、日食预报

四、月食预报

第七节 步五星术

一、五星动态表

二、对合点进行两项中心差改正，并求出定合日及其黄经

三、对整个五星动态表做行星中心差和太阳中心差改正，得

出所求会合周期内行星真实视运动表

四、已知时间求行星位置及已知行星位置求时间

五、行星黄纬

第八节 余论

第九章 宣明历术及晚唐五代宋历法

第一节 宣明历法数和日月运动

一、宣明历的颁行、创新及影响

二、法数闰限与平运动的计算

三、太阳盈缩和日度

第二节 日月黄经和定气天文计算

第三节 定朔推步和进朔

第四节 日食月食的形成

一、日食月食性质不同

二、食甚时刻与实朔实望并不一致

第五节 视差对天体坐标的影响

第六节 视差对日食的影响和计算

一、推算需要的日食要素

二、计算月亮的赤经赤纬视差

三、求观测者地面日月赤经相合时刻

四、求观测地地面赤经合时刻之日月间距离

五、计算食甚、食分和初亏、复圆时刻

第七节 步轨漏术

第八节 步交会术及日食三差

第九节 晚唐五代宋历法一瞥

第十章 元明授时集大成

第一节 授时历制定、颁行与成就、特点

一、授时历的制定和颁行

二、授时历的成就与特点

第二节 日行盈缩、月行迟疾

一、日行盈缩的计算

二、月行迟疾的计算

第三节 黄赤道差、内外度及白道交周

一、黄赤道差、黄赤道内外度的计算

## 二、白道交周的计算

### 第四节 五星盈缩的计算及布立成

### 第五节 步气朔、步日躔及太阳过宫

#### 一、步气朔闰

#### 二、步日躔与太阳过宫

### 第六节 步月离、定差距差定限度

#### 一、推定朔弦望加时日月宿度

#### 二、推定朔弦望加时赤道月度

#### 三、求正交日辰

#### 四、推正交距冬至加时黄道积度及宿次

#### 五、求定差距差及月离赤道正交宿度

#### 六、求月离赤道正交后半交白道出入赤道内外度（白道赤道交角）

### 第七节 步交会术、日月食推步

#### 一、步交食

#### 二、日月食推步实例及精度

### 第八节 步五星术

#### 一、基本法数和五星动态表

#### 二、五星周期数据、合应历应的精度

#### 三、五星推步

### 第九节 五星推步实例及其精度

### 第十节 弧矢割圆术与步中星

#### 一、句股测望和弧矢割圆术

#### 二、布黄赤道相求弧矢诸率立成法

#### 三、里差刻漏和求黄道每度昼夜刻

#### 四、步中星——求每日日出辰刻

#### 五、求定差、距度、定限度

### 参考文献

### 总跋

### 补记

### 封底